16
Convexité

Dans ce chapitre, le plus important, ce sont les dessins !

I Fonctions convexes d'une variable réelle

I désigne un intervalle réel contenant au moins deux points.

1 Définitions

Définition 1 : Fonction convexe, concave

- $f : I \to \mathbb{R}$ est dite **convexe** sur I lorsque

$$\forall x, y \in I,\ \ \forall t \in [0,1],\ \ f\big((1-t)x+ty\big) \leqslant (1-t)f(x)+tf(y)$$

- f est dite **concave** sur I lorsque $-f$ est convexe.

La définition donne immédiatement l'interprétation géométrique suivante :

Propriété 1 : Caractérisation par interprétation géométrique

f est convexe (respectivement concave) si et seulement si tout sous-arc de sa courbe est situé en dessous (respectivement au-dessus) de la corde correspondante.

Définition 2 : Épigraphe

La partie $\mathscr{E}(f)$ du plan située au dessus (au sens large) de la courbe de f s'appelle son **épigraphe**.

$$(x,y) \in \mathscr{E}(f) \Longleftrightarrow y \geqslant f(x)$$

2 Caractérisations

Ces caractérisations sont à visualiser sur des dessins !

Propriété 2 : Caractérisation avec l'épigraphe

f est convexe sur I si et seulement si son épigraphe $\mathscr{E}(f)$ est une partie convexe de $\mathbb{R}^2$.

Propriété 3 : Caractérisations avec les pentes des cordes

Soit $f : I \to \mathbb{R}$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

(i) f est convexe sur I.

*(ii) **Inégalité des trois cordes** : si $x, y, z \in I,\ x < y < z$,*

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x} \leqslant \frac{f(z)-f(x)}{z-x} \leqslant \frac{f(z)-f(y)}{z-y}$$

*(iii) **Croissance des pentes** : pour tout $a \in I$,*

$$\tau_a : \left|\begin{array}{ccc} I\setminus\{a\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} \end{array}\right. \text{ est croissante}$$

3 Cas des fonctions dérivables

Propriété 4 : Caractérisation avec la dérivée

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I.

f est convexe si et seulement si f' est croissante sur I

Corollaire 1 : Caractérisation avec la dérivée seconde

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ deux fois dérivable sur I.

f est convexe (respectivement concave) si et seulement si $f'' \geqslant 0$ (respectivement $f'' \leqslant 0$) sur I.

Propriété 5 : Caractérisation avec les tangentes

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ dérivable sur I.

f est convexe (respectivement concave) si et seulement si son graphe est au-dessus (respectivement au dessous) de toutes ses tangentes.

4 Inégalités de convexité

Propriété 6 : Inégalité de Jensen

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, $n \geqslant 1$, $(x_1,\dots,x_n) \in I^n$, $(\lambda_1,\dots,\lambda_n) \in [0,1]^n$ tel que $\displaystyle\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$.

- *Si f est convexe, $f\left(\displaystyle\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \leqslant \displaystyle\sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$.*

  En particulier, $f\left(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i\right) \leqslant \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^n f(x_i)$.

- *Si f est concave, $f\left(\displaystyle\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i\right) \geqslant \displaystyle\sum_{i=1}^n \lambda_i f(x_i)$.*

  En particulier, $f\left(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i\right) \geqslant \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^n f(x_i)$.

Exemples 1 : Très classiques

E 1 – **Inégalité arithmético-géométrique** : pour tout $x_1,\dots,x_n \in \mathbb{R}_*^+$, $\sqrt[n]{x_1\cdot\dots\cdot x_n} \leqslant \dfrac{x_1+\dots+x_n}{n}$.

E 2 – $\forall x > -1,\ \ \ln(1+x) \leqslant x$. $\qquad \forall x \in \mathbb{R},\ \ e^x \geqslant 1+x$.

E 3 – $\forall x \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right],\ \ \dfrac{2}{\pi}x \leqslant \sin x \leqslant x$.