17 Dénombrement

I Ensembles finis

1 Définition, cardinal

On note $[\![1,n]\!]$ l'ensemble $\{1,2,\ldots,n\}$ si $n\in\mathbb{N}^*$ et $\varnothing$ si $n=0$.

Lemme 1

Soit $n,p\in\mathbb{N}^*$.
S'il existe une bijection de $[\![1,p]\!]$ sur $[\![1,n]\!]$, alors $p=n$.
(S'il existe une injection de $[\![1,p]\!]$ sur $[\![1,n]\!]$, alors $p\leqslant n$.)
(Toute injection de $[\![1,n]\!]$ dans lui-même est une bijection.)

Définition 1

Un ensemble E est dit **fini** si et seulement si E est vide ou on peut trouver un entier naturel n et une bijection f entre $[\![1,n]\!]$ et E.

Propriété 1

Si E est un ensemble fini, le n de la définition précédente est unique.

Définition 2

Si E est en bijection avec $[\![1,n]\!]$, n est appelé **cardinal** de E, noté $\operatorname{Card} E$, $|E|$ ou $\#E$.
Par convention, on pose $|\varnothing|=0$.

Propriété 2

(i) Deux ensembles finis équipotents ont même cardinal.

(ii) Un ensemble est fini si et seulement s'il est équipotent à un ensemble fini.

2 Résultats sur les ensembles finis

a Partie d'un ensemble fini

Propriété 3

Toute partie A d'un ensemble fini E est finie et $|A|\leqslant|E|$,avec égalité si et seulement si $A=E$.

b Intersection d'ensembles finis

Propriété 4

Si A et B deux parties d'un ensemble dont l'une au moins est finie, $A\cap B$ est fini, et, lorsqu'ils existent,

$$|A\cap B|\leqslant\min(|A|,|B|).$$

c Réunion d'ensembles finis

Propriété 5

*Soit A et B sont des parties finies **disjointes** d'un ensemble E. Alors $A\sqcup B$ est fini et*

$$|A\sqcup B|=|A|+|B|$$

Corollaire 1

Soit E un ensemble fini, A une partie de E et $\overline{A}$ son complémentaire dans E.

$$|A|+\left|\overline{A}\right|=|E|$$

Propriété 6

*Si $(A_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est une famille de parties finies **deux à deux disjointes** de E,*

$$\left|\bigsqcup_{i=1}^{n}A_i\right|=\sum_{i=1}^{n}|A_i|.$$

Propriété 7

Si A et B sont des parties finies de E, $A\setminus B$ l'est et

$$|A\setminus B|=|A|-|A\cap B|.$$

Propriété 8

Soit A et B des parties finies de A. Alors $A\cup B$ est fini et

$$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$$

d Produit cartésien

Propriété 9

Soient E et F des ensembles finis. $E\times F$ l'est aussi, et
$$|E\times F| = |E|\times|F|$$

Propriété 10

Si $(E_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ est une famille d'ensembles finis,
$$\left|\prod_{i=1}^{n} E_i\right| = \prod_{i=1}^{n} |E_i|.$$

e Fonctions entre ensembles finis

Propriété 11

Soient E et F des ensembles finis. $\mathscr{F}(E,F)=F^E$ l'est aussi, et
$$\left|F^E\right| = |F|^{|E|}$$

Propriété 12

Soit f une application d'un ensemble fini E dans un ensemble F.

Alors $f(E)$ est fini et $\left|f(E)\right|\leqslant|E|$ avec égalité si et seulement si f est injective.

Théorème 1

*Soient E et F des ensembles finis **de même cardinal**. Si f est une application de E dans F, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i) f est injective, (ii) f est surjective, (iii) f est bijective.

f Lemme des bergers

Propriété 13 : Lemme des Bergers

Si on dispose d'une partition de E en p parties ayant toutes le même nombre n d'éléments, alors $|E| = p\cdot n$.

Autre formulation : Soient E et F des ensembles finis et f une application de E dans F.

Si tous les sous-ensembles $f^{-1}(\{y\})$ pour $y\in F$ ont même cardinal p, c'est-à-dire si tout $y\in E$ possède exactement p antécédents, alors $|E|=p|F|$.

g Nombre de parties

Propriété 14

Le nombre de parties d'un ensemble fini E est
$$|\mathscr{P}(E)| = 2^{|E|}$$

II Listes et combinaisons

1 p-listes

Définition 3

Soit E un ensemble. On appelle **p-liste** d'éléments de E tout p-uplet d'éléments de E.

2 Arrangements

Définition 4 : Notation HP

On appelle **p-arrangement** de E toute p-liste d'éléments de E deux à deux distincts.

Le nombre de p-arrangements d'un ensemble de cardinal n est noté A_n^p.

On pose $A_n^0 = 1$.

Propriété 15

Si $n,p\in\mathbb{N}$,
$$A_n^p = \begin{cases} n(n-1)\cdots(n-p+1) = \dfrac{n!}{(n-p)!} & \text{si } 1\leqslant p\leqslant n \\ 1 & \text{si } p=0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Propriété 16

Le nombre d'injections d'un ensemble E de cardinal p dans un ensemble F de cardinal n est A_n^p.

Propriété 17

Le nombre de permutations d'un ensemble fini E, i.e. de bijections de E dans E est
$$|\mathfrak{S}(E)| = |E|!$$

3 Combinaisons

a Parties à p éléments

Définition 5

On note $\binom{n}{p}$ (prononcer p parmi n, jadis noté C_n^p) le nombre de parties à p éléments, appelées p-**combinaisons**, d'un ensemble qui en contient n, i.e. le nombre de parties de cardinal p d'un ensemble de cardinal n.

$$|E| = n \Longrightarrow |\mathscr{P}_p(E)| = \binom{n}{p}$$

b Rappel des propriétés des coefficients binomiaux

Propriété 18

Si $n \in \mathbb{N}$ *et* $p \in \mathbb{Z}$,

$$\binom{n}{p} = \binom{n}{n-p}.$$

Propriété 19 : Formule de Pascal

Si $n \in \mathbb{N}$ *et* $p \in \mathbb{Z}$,

$$\binom{n}{p} = \binom{n-1}{p-1} + \binom{n-1}{p}.$$

Propriété 20 : Formule de factorisation / du maire / du capitaine... HP

Si $p \in \mathbb{Z}$ *et* $n \in \mathbb{N}^*$,

$$p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}.$$

Propriété 21

Si $0 \leqslant p \leqslant n$,

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} = \frac{A_n^p}{p!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{p!}$$

Propriété 22 : Formule du binôme de Newton

Si a *et* b *sont des éléments d'un anneau* A *tels que* $ab = ba$ *et* $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}.$$

Corollaire 2

Soit $n \in \mathbb{N}$. $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$ *et* $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$ *si* $n \neq 0$, 1 *sinon.*