Devoir Libre n° 11

La copie est à rédiger sur feuille ou en LaTeX.

Utiliser les canaux `#Maths` et `#LaTeX` du `Mattermost` dont je rappelle l'adresse

`https://chat.mp2i.synology.me/`

pour toute demande d'aide.

Le plan usuel orienté $\mathscr{P}$ est muni d'un repère orthonormé direct $\mathscr{R} = (O, \vec{i}, \vec{j})$.
On note $\mathscr{H}$ la courbe d'équation cartésienne $x^2 - 3y^2 = 1$ dans le repère $\mathscr{R}$.

1. Étude de fonction

On pose $f : x \mapsto \dfrac{\sqrt{x^2-1}}{\sqrt{3}}$.

1. Donner l'ensemble de définition et l'ensemble de dérivabilité de f. Sur quel domaine suffit-il de l'étudier ?

2. Calculer f' là où elle est définie.

3. On s'intéresse à la dérivabilité en 1. En posant $x = 1+h$, déterminer la limite lorsque $x \to 1$ (donc $h \to 0$) de $\dfrac{f(x)}{x-1}$. Quelle est l'allure locale de la courbe représentative de f au voisinage de 1 ?

4. Dresser le tableau des variations de f.

5. Montrer que $f(x) - \dfrac{x}{\sqrt{3}} \underset{x\to+\infty}{\sim} -\dfrac{1}{2\sqrt{3}x}$.

6. En déduire que la droite d'équation $y = \dfrac{x}{\sqrt{3}}$ est asymptote en $+\infty$. Où se situe la courbe ?

Rappel : Deux fonctions équivalentes ont localement la même limite et le même signe.

7. Tracer la courbe représentative de f.

2. Tracé de $\mathscr{H}$

8. Préciser les coordonnées des sommets A et A' (intersection avec l'axe (Ox)) de la courbe $\mathscr{H}$. (On choisira A avec une abscisse positive.)

9. Compléter le graphe de la partie **1.** pour obtenir $\mathscr{H}$.

3. Une loi de composition interne sur le plan

On munit le plan $\mathscr{P}$ d'une loi de composition interne notée $\star$ qui aux points M et M' de coordonnées respectives (x, y) et (x', y') associe le point $N = M \star M'$ de coordonnées (α, β) définies par

$$\begin{cases} \alpha &= xx' + 3yy' \\ \beta &= xy' + yx' \end{cases}$$

Par abus de notation, on pourra se permettre d'écrire $(x, y) \star (x', y') = (\alpha, \beta)$.

10. On admet que la loi $\star$ est associative. Montrer qu'elle est commutative et qu'elle possède un élément neutre (dans $\mathscr{P}$) que l'on précisera.

11. On considère $F : \mathscr{P} \to \mathbb{R}$ qui à $M(x, y)$ associe $F(M) = x^2 - 3y^2$.

11.a) Quels sont les ensembles des points M du plan tels que $F(M) = 0$ et $F(M) = 1$?

11.b) Soit M et M' deux points du plan. Établir que $F(M \star M') = F(M)F(M')$.

11.c) En déduire que si M et M' appartiennent à $\mathscr{H}$, c'est aussi le cas de $M \star M'$.

4. Structure de groupe sur $\mathscr{H}$

12. Montrer que $(\mathscr{H}, \star)$ est un groupe abélien, et que le symétrique de $M \in \mathscr{H}$ pour $\star$ est le symétrique de M par rapport à (Ox).

13. On note $\mathscr{H}^+$ l'ensemble de points de $\mathscr{H}$ d'abscisse strictement positive. Montrer qu'il s'agit d'un sous-groupe de $\mathscr{H}$. Est-ce le cas de $\mathscr{H}^- = \mathscr{H} \setminus \mathscr{H}^+$?

5. Construction géométrique du composé de deux points de $\mathscr{H}$

14. Soient M et M' deux points distincts de $\mathscr{H}$ non symétriques par rapport à (Ox) et $N = M \star M'$. On veut montrer que la droite (MM') est parallèle à la droite (AN).

14.a) Montrer que $(x' - x)(xy' - yx') = (y' - y)(xx' + 3yy' - 1)$.

14.b) Conclure.

15. En déduire un procédé géométrique de construction du composé par $\star$ de deux points distincts de $\mathscr{H}$.

On peut montrer que si M un point de $\mathscr{H}$ et $N = M \star M$, alors la droite (AN) est parallèle à la tangente en M à $\mathscr{H}$ et en déduire une construction géométrique de $M \star M$.

FIN DE L'ÉNONCÉ