

DL 12

Le but du problème est de construire une fonction continue sur \mathbb{R} mais dérivable en aucun point de \mathbb{R} . $[.]$ désigne la partie entière.

On considère la fonction f définie sur \mathbb{R} par

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \left| x - 2 \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor \right|$$

1. Etude de f .

1.a) Montrer que f est 2-périodique.

1.b) Exprimer f sur l'intervalle $[0, 2]$.

1.c) Montrer que f est majorée par 1.

1.d) Représenter graphiquement la fonction f .

1.e) Montrer que f est continue sur \mathbb{R} .

2. Pour tout entier naturel k , on considère la fonction f_k définie sur \mathbb{R} par

$$\forall x \in \mathbb{R}, f_k(x) = \frac{1}{2^k} f(2^k x)$$

Pour tout entier naturel n , on considère également la fonction S_n définie sur \mathbb{R} par

$$\forall x \in \mathbb{R}, S_n(x) = \sum_{k=0}^n f_k(x)$$

2.a) Construire sur un même graphique les courbes représentatives de f_0, f_1, f_2 restreintes à l'intervalle $[0, 2]$.

2.b) Montrer que pour tout entier naturel k , f_k est affine sur tout intervalle $\left[\frac{j}{2^k}, \frac{j+1}{2^k}\right]$ où $j \in \mathbb{Z}$, et préciser la pente.

2.c) Soit x un réel. Montrer que la suite $(S_n(x))_n$ est convergente. On note $S(x)$ sa limite qu'on ne cherchera pas à calculer.

2.d) Soit $(n, p) \in \mathbb{N}^2$ tel que $p > n$. Soit x un réel. Montrer que $|S_p(x) - S_n(x)| \leq \frac{1-2^{n-p}}{2^n}$.

2.e) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $n \in \mathbb{N}$, $|S(x) - S_n(x)| \leq \frac{1}{2^n}$.

2.f) Montrer que pour tout $(x, x_0) \in \mathbb{R}^2$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$|S(x) - S(x_0)| \leq |S(x) - S_n(x)| + |S_n(x) - S_n(x_0)| + |S_n(x_0) - S(x_0)|$$

2.g) En déduire que S est continue sur \mathbb{R} .

3. Soit x un réel et n un entier naturel. On pose $x_n = \frac{\lfloor 2^n x \rfloor}{2^n}$ et $x'_n = \frac{\lfloor 2^n x \rfloor + 1}{2^n}$.

3.a) Montrer que $x_n \leq x < x'_n$ et que les suites $(x_n)_n$ et $(x'_n)_n$ convergent vers x .

3.b) Montrer que, pour tout entier $k > n$, $f_k(x_n) = f_k(x'_n) = 0$.

3.c) Montrer que si $(n, N) \in \mathbb{N}$ tels que $N > n$

$$S_N(x'_n) - S_N(x_n) = \sum_{k=0}^n (f_k(x'_n) - f_k(x_n))$$

3.d) On pose

$$D_n = \frac{S(x'_n) - S(x_n)}{x'_n - x_n}$$

Montrer qu'il existe des entiers $\varepsilon_{k,n}$ valant ± 1 tels que

$$D_n = \sum_{k=0}^n \varepsilon_{k,n}.$$

Indication : on utilisera la question **2.b**.

3.e) Montrer que la suite $(D_n)_n$ est divergente.

4. On suppose que la fonction S est dérivable en x . On conserve les notations de la question précédente.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $\alpha_n = \frac{x'_n - x}{x'_n - x_n}$.

4.a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Justifier que α_n est bien défini et que $\alpha_n \in]0, 1[$.

4.b) Montrer que la suite $\left(\alpha_n \left(\frac{S(x'_n) - S(x)}{x'_n - x} - S'(x) \right) \right)_n$ converge vers 0.

4.c) Montrer que

$$D_n - S'(x) = \alpha_n \left(\frac{S(x'_n) - S(x)}{x'_n - x} - S'(x) \right) + (1 - \alpha_n) \left(\frac{S(x_n) - S(x)}{x_n - x} - S'(x) \right)$$

4.d) Montrer que la suite $(D_n - S'(x))_n$ converge vers 0.

4.e) Trouver une contradiction et conclure.

FIN DE L'ÉNONCÉ