Exercice 2 :

1.a) Si $z \in \mathcal{H}$, $\operatorname{Im}(z) > 0$.

Si $c=0$, alors $ad-bc = ad = 1$ donc $d \neq 0$ donc $\underline{cz+d \neq 0}$

Si $c \neq 0$, $cz+d = c\left(z+\frac{d}{c}\right) \neq 0$ car $c\neq 0$ et $\operatorname{Im}\big(z+\underbrace{\tfrac{d}{c}}_{\in\mathbb{R}}\big) = \operatorname{Im}(z) \neq 0$.

Donc $\boxed{\forall z \in \mathcal{H},\ cz+d \neq 0.}$

1.b) Si $z \in \mathcal{H}$, $ac\bar{z}z + daz + bc\bar{z} + bd = ac|z|^2 + (1+bc)z + bc\bar{z} + bd$

$$= \underbrace{ac|z|^2}_{\in\mathbb{R}} + z + \underbrace{2bc\operatorname{Re}(z) + bd}_{\in\mathbb{R}}$$

donc $\boxed{\operatorname{Im}(ac\bar{z}z + daz + bc\bar{z} + bd)} = \operatorname{Im} z \boxed{>0.}$

1.c) $\varphi_{a,b,c,d} : \left|\begin{array}{l} \mathcal{H} \longrightarrow \mathcal{H} \\ z \longmapsto \dfrac{az+b}{\underbrace{cz+d}_{\neq 0 \text{ vu a)}}} \end{array}\right.$ bien définie

si et seulement si $\forall z \in \mathcal{H}$, $\dfrac{az+b}{cz+d} \in \mathcal{H}$

ssi $\forall z \in \mathcal{H}$, $\operatorname{Im}\left(\dfrac{az+b}{cz+d}\right) > 0$

Or $\dfrac{az+b}{cz+d} = \dfrac{(az+b)(c\bar{z}+d)}{|cz+d|^2} = \dfrac{acz\bar{z} + bc\bar{z} + adz + bd}{|cz+d|^2}$.

Ainsi, vu la question précédente, $\forall z \in \mathcal{H}$, $\dfrac{az+b}{cz+d} \in \mathcal{H}$.

Donc $\boxed{\varphi_{a,b,c,d} \text{ est bien défini.}}$

2.a) Pour $z, z' \in \mathcal{H}$, si $\varphi_{a,b,c,d}(z) = \varphi_{a,b,c,d}(z')$,

$\dfrac{az+b}{cz+d} = \dfrac{az'+b}{cz'+d}$ donc $(az+b)(cz'+d) = (az'+b)(cz+d)$

donc $\cancel{ac zz'} + bcz' + adz + \cancel{bd} = \cancel{aczz'} + adz' + bcz + \cancel{bd}$

donc $(bc-ad)z' = (bc-ad)z$

donc $z' = z$ car $(a,b,c,d) \in F$.

Donc $\boxed{\varphi_{a,b,c,d} \text{ est injective.}}$

2.b) On résout, pour $Z \in \mathcal{H}$,

$Z = \dfrac{az+b}{cz+d} \Leftrightarrow (cz+d)Z = az+b \Leftrightarrow z(cZ-a) = b-dZ$

$\Leftrightarrow z = \dfrac{b-dZ}{cZ-a}$ car on remarque que $(-d)(-a) - bc = 1$ donc $(-d, b, c, -a) \in F$

Donc $\boxed{\varphi_{a,b,c,d} \text{ bijective et } \varphi_{a,b,c,d}^{-1} = \varphi_{-d,b,c,-a}}$

3. On a donc $G \subset \mathfrak{S}(\mathcal{H})$.

De plus, $G \neq \emptyset$ car $id_{\mathcal{H}} = \varphi_{\underbrace{1,0,0,1}_{\in F}} \in G$

Si $(a,b,c,d), (a',b',c',d') \in F$,

$$\varphi_{a,b,c,d} \circ \varphi_{a',b',c',d'} : z \longmapsto \frac{a\frac{a'z+b'}{c'z+d'} + b}{c\frac{a'z+b'}{c'z+d'} + d} = \frac{a(a'z+b') + b(c'z+d')}{c(a'z+b') + d(c'z'+d')}$$

$$= \frac{(aa'+bc')z + ab'+bd'}{(ca'+dc')z + cb'+dd'}$$

avec $(aa'+bc')(cb'+dd') - (ab'+bd')(ca'+dc')$

$$= a(\cancel{a'cb'} + a'dd' - \cancel{b'ca'} - b'dc')$$
$$+ b(c'cb' + \cancel{c'dd'} - d'ca' - \cancel{d'dc'})$$
$$= ad(a'd' - b'c') + bc(b'c' - a'd')$$
$$= (ad-bc)(a'd'-b'c')$$
$$= 1$$

Donc $(aa'+bc', ab'+bd', ca'+dc', cb'+dd') \in F$.

et $\varphi_{a,b,c,d} \circ \varphi_{a',b',c',d'} = \varphi_{aa'+bc', ab'+bd', ca'+dc', cb'+dd'} \in G$.

et $\varphi_{a,b,c,d}^{-1} = \varphi_{-d,b,c,-a} \in G$ comme vu à la question précédente.

Donc $\boxed{(G,\circ) \text{ sous-groupe de } (\mathfrak{S}(G),\circ)}$.

4-a) Comme $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, $\boxed{(\cos\theta, -\sin\theta, \sin\theta, \cos\theta) \in F}$.

4-b) $\psi : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow G \\ \theta \longmapsto r_\theta \end{array} \right.$

$\forall \theta, \theta' \in \mathbb{R}$, $\psi(\theta+\theta') = r_{\theta+\theta'} = \varphi_{\overset{a\ a'\ +\ b\ c'}{\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta'},\ \overset{b\ d'\ +\ b'\ a}{-\sin\theta\cos\theta' - \sin\theta'\cos\theta},\ \overset{c\ a'\ +\ c'\ d}{\sin\theta\cos\theta' + \sin\theta'\cos\theta},\ \overset{d\ d'\ +\ c\ b'}{\cos\theta\cos\theta' - \sin\theta\sin\theta'}}$

$= \varphi_{\cos\theta, -\sin\theta, \sin\theta, \cos\theta} \circ \varphi_{\cos\theta', -\sin\theta', \sin\theta', \cos\theta'}$ vu les résultats de la question 3.

$= r_\theta \circ r_{\theta'}$

Donc $\boxed{\psi \text{ morphisme de groupes.}}$

4_c) $\theta \in \ker \varphi \Leftrightarrow r_\theta = id_{\mathcal{H}} \Leftrightarrow \forall z \in \mathcal{H}, \dfrac{\cos\theta\, z + \sin\theta}{\sin\theta\, z + \cos\theta} = z$

$\Leftrightarrow \forall z \in \mathcal{H}, \quad \sin\theta\, z^2 = -\sin\theta$

$\Leftrightarrow \forall z \in \mathcal{H}, \quad \sin\theta\,(z^2+1) = 0$

$\Leftrightarrow \sin\theta = 0$ (en prenant un $z \neq i$)

Donc $\boxed{\ker \varphi = \pi\mathbb{Z}}$ (qui est bien un sous-groupe de $(\mathbb{R},+)$.)

5_ Si $c=0$,

$$\varphi_{a,b,0,d}(z) = \frac{a}{d} z + \frac{b}{d} = \frac{a}{d}\left(z + \frac{b}{a}\right) \quad \text{car } ad - 0 = 1 \text{ donc } a \neq 0.$$

$$\boxed{\varphi_{a,b,0,d} = h_{\frac{a}{d}} \circ g_{\frac{b}{a}}.}$$

Si $c \neq 0$,

$$\varphi_{a,b,c,d}(z) = \frac{az+b}{c(z+\frac{d}{c})} = \frac{a(z+\frac{d}{c}) + b - \frac{ad}{c}}{c(z+\frac{d}{c})} = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2(z+\frac{d}{c})} = \frac{a}{c} + \frac{1}{c^2(z+\frac{d}{c})}$$

donc $\boxed{\varphi_{a,b,c,d} = g_{\frac{a}{c}} \circ h_{-\frac{1}{c^2}} \circ f \circ g_{\frac{d}{c}}.}$

FIN