Dérivabilité

- Lorsque l'on a des dérivées n^e, penser à la formule de Leibniz ou aux récurrences.
- La démonstration du théorème des accroissements finis est une technique usuelle utile dans les exercices du type des exercices 10 et 11 est à retenir, donc.
- Le théorème de Rolle est d'usage courant mais seulement valable pour les fonctions à valeurs réelles. Il existe des extensions en ouvrant des bornes et en remplaçant les valeurs par les limites (voir exercice 10).
- De même, le théorème des accroissements finis n'est plus valable si la fonction n'est pas à valeurs réelles. Mais l'inégalité est valable dans un cadre beaucoup plus large. Par contre il faut alors se limiter à des majorations.
- Le théorème « de la dérivée » est un théorème du prolongement $\mathscr{C}^1$. Mais attention : on ne prolonge pas une dérivée, on prolonge la fonction et on obtient sa dérivabilité au point.

Vrai ou faux

1. Un fonction dérivable à droite et à gauche en un point est dérivable en ce point.
2. Pour toute fonction dérivable sur $[a,b]$, il existe $c\in[a,b]$ tel que $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$.
3. Si f est une fonction continue sur $[a,b]$, dérivable sur $]a,b[$ à valeurs complexes telle que $f(a)=f(b)$, on peut appliquer le théorème de Rolle à $\mathfrak{Re}\,f$ et $\mathfrak{Im}\,f$ et en déduire que f' s'annule sur $]a,b[$.

1

Étudier la dérivabilité de

1. $f(x)=1-\cos\sqrt{|x|}$ en 0

2. $f(x)=x\sin x\sin\frac{1}{x}$ si $x\neq 0$ et $f(0)=0$, en 0.

3. $f(x)=x^2$ si $x\in\mathbb{Q}$ et $f(x)=0$ sinon.

4. $f(x)=1-\mathrm{e}^x$ si $x<0$, $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x-1}{\mathrm{e}^x+1}$ si $x>0$ et $f(0)=0$.

5. $f(x)=\dfrac{|x|}{(1+|1-x^2|)^n}$ où $n\in\mathbb{N}$, en 0, ±1.

2

(vu en cours) Étudier la dérivabilité de $f:x\mapsto \mathrm{e}^{-1/x}$ si $x\geqslant 0$ et 0 sinon.

3

✎ Montrer que la dérivée d'une fonction dérivable paire (respectivement impaire, T-périodique) est impaire (respectivement paire, T-périodique).

4

Soit $f:I\to\mathbb{C}$ une fonction dérivable. Montrer que $|f|:I\to\mathbb{R}$ est dérivable en tout point où f ne s'annule pas et exprimer sa dérivée.

5

Soit $f:x\mapsto\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$.

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que pour tout $n\in\mathbb{N}$, il existe une fonction polynomial P_n telle que $\forall x\in\mathbb{R},\ f^{(n)}(x)=\dfrac{p_n(x)}{\sqrt{1+x^2}^{2n+1}}$.

2. Montrer que pour tout n, pour tout x, $p_{n+1}(x)=(1+x^2)p_n'(x)-(2n+1)xp_n(x)$.

3. En utilisant une équation différentielle à cœfficients polynomiaux dont f est une solution, montrer que pour tout n non nul, pour tout x, $p_{n+1}(x)+(2n+1)xp_n(x)+n^2(1+x^2)p_{n-1}(x)=0$ puis $p_n'(x)=-n^2p_{n-1}(x)$.

4. Calculer $f^{(n)}(0)$ pour tout n.

6

Soit $f:I\to\mathbb{R}$ dérivable sur I avec $0\in I$, $f(0)=f'(0)=0$ et telle qu'on ait $a\neq 0$ tel que $f(a)=0$. Montrer qu'il existe un point M de la courbe représentative de f en lequel la tangente passe par O.

7

✎ Déterminer toutes les applications $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ dérivables telles que

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad f(x+y)=f(x)+f(y).$$

8

Soit $a,b,c\in\mathbb{R}$. Montrer que le polynôme $4aX^3+3bX^2+2cX-(a+b+c)$ admet une racine dans $]0,1[$.

9 (vu en cours) Théorème du prolongement $\mathscr{C}^k$

Soit $k\in\mathbb{N}\cup\{+\infty\}$, et $f\in\mathscr{C}^k(I\setminus\{a\})$ telle que $\forall\, i\in[\![0,k]\!]$, $f^{(i)}$ a une limite finie en a. Montrer que le prolongement de f par continuité en a est une fonction de classe $\mathscr{C}^k$ sur I.

10 Égalité de Taylor-Lagrange

Soit f de classe $\mathscr{C}^{(n+1)}$ sur I, $a,b\in I$. Montrer qu'il existe $c\in]a,b[$ tel que

$$f(b)=f(a)+f'(a)(b-a)+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

11

1. Soient $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$, g de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$ et deux fois dérivable sur $]a,b[$. Montrer qu'il existe $c\in]a,b[$ tel que

$$g(b)=g(a)+(b-a)g'(a)+\frac{(b-a)^2}{2}g''(c).$$

2. Soient $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$, f de classe $\mathscr{C}^2$ sur $[a,b]$ et trois fois dérivable sur $]a,b[$. Montrer qu'il existe $c\in]a,b[$ tel que

$$f(b)=f(a)+(b-a)f'\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{(b-a)^3}{24}f'''(c).$$

12 Généralisations du théorème de Rolle

1. Si f est continue sur $[a,b[$, dérivable sur $]a,b[$ telle que $f(x)\xrightarrow[x\to b]{}f(a)$, à valeurs réelles, montrer que la conclusion du théorème de Rolle tient toujours.
2. Soit $f\in\mathbb{R}^\mathbb{R}$ dérivable et admettant une même limite (finie ou non) en $\pm\infty$. Montrer qu'il existe un réel c tel que $f'(c)=0$.
3. Soient $a\in\mathbb{R}$ et f continue sur $[a,+\infty[$, dérivable sur $]a,+\infty[$ telle que $f(x)\xrightarrow[x\to+\infty]{}f(a)$. Montrer qu'il existe $c\in]a,+\infty[$ tel que $f'(c)=0$.

13

Soient $a\in\mathbb{R}_+^*$ et $f:[0,a]\to\mathbb{R}$ continue sur $[0,a]$, dérivable sur $]0,a]$ telle que $f(0)=0$ et $f(a)f'(a)<0$. Montrer qu'il existe $c\in]0,a[$ tel que $f'(c)=0$.

14

Soit I intervalle $\mathbb{R}$, n,k,ℓ des entiers tels que $0\leqslant\ell\leqslant\min(k,n)$ et f n fois dérivable sur I telle que f a au moins k zéros dans I. Montrer que $f^{(\ell)}$ admet au moins $k-\ell$ zéros dans I.

15 Soient $(a,h) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_*^+$, f continue sur $[a-h, a+h]$, dérivable sur $]a-h, a+h[$. Montrer qu'il existe $\theta \in]0,1[$ tel que $f(a+h) - f(a-h) = h(f'(a+\theta h) + f'(a-\theta h))$.

16 Soit $f : x \mapsto \left(x^2-1\right)^n$ et $p :\ x \mapsto f^{(n)}(x)$. Montrer que p admet n zéros réels dans $]-1,1[$.

17 **Théorème de Darboux**

Soit $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable.

1. On suppose que $f'(a)$ et $f'(b)$ sont de signe contraire. Démontrer que f' s'annule sur $]a,b[$.
2. En déduire que la dérivée d'une fonction dérivable possède la propriété des valeurs intermédiaires.
3. La fonction partie entière admet-elle des primitives ?

18 En utilisant le théorème des accroissements finis, calculer la limite lorsque $x \to +\infty$ de $(x+1)e^{\frac{1}{x+1}} - x e^{\frac{1}{x}}$.

19 On se propose de démontrer l'inégalité des accroissements finis dans le cas complexe où f est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, telle que $\left|f'\right| \leqslant k$ sur $]a,b[$.

Pour cela, on considère $\varphi : \left| \begin{array}{ccc} [a,b] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \mathfrak{Re}\left(\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\overline{f(t)}\right) \end{array} \right.$.

Conclure en appliquant l'inégalité des accroissements finies réelle à φ.

20 **CCINP 3 : Formule de Leibniz**

1. On pose $g(x) = e^{2x}$ et $h(x) = \dfrac{1}{1+x}$.
   Calculer, pour tout entier naturel k, la dérivée d'ordre k des fonctions g et h sur leurs ensembles de définitions respectifs.
2. On pose $f(x) = \dfrac{e^{2x}}{1+x}$.
   En utilisant la formule de Leibniz concernant la dérivée $n^{\text{ième}}$ d'un produit de fonctions, déterminer, pour tout entier naturel n et pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$, la valeur de $f^{(n)}(x)$.
3. Démontrer, dans le cas général, la formule de Leibniz, utilisée dans la question précédente.

21 **CCINP 4 : théorème de la limite de la dérivée**

1. Énoncer le théorème des accroissements finis.
2. Soit $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ et soit $x_0 \in]a,b[$.
   On suppose que f est continue sur $[a,b]$ et que f est dérivable sur $]a,x_0[$ et sur $]x_0,b[$.
   Démontrer que, si f' admet une limite finie en x_0, alors f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) = \lim\limits_{x \to x_0} f'(x)$.
3. Prouver que l'implication : (f est dérivable en x_0) $\Longrightarrow$ (f' admet une limite finie en x_0) est fausse.
   Indication : on pourra considérer la fonction g définie par : $g(x) = x^2 \sin\dfrac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et $g(0) = 0$.