

Analyse asymptotique

Extrait du programme officiel :

Les développements limités sont les principaux outils du calcul asymptotique. Afin d'en disposer au plus tôt, on traitera en premier lieu les fonctions. Les étudiants doivent connaître les développements limités usuels et savoir mener à bien rapidement des calculs asymptotiques simples. En revanche, les situations dont la gestion manuelle ne relèverait que de la technicité seront traitées à l'aide d'outils logiciels.

Cette section permet de revenir sur la problématique de la vitesse de convergence introduite au premier semestre lors de l'étude des fonctions de variable réelle.

Contenus

Capacités & commentaires

Développements limités

Développement limité à l'ordre n d'une fonction en un point. Unité des coefficients, troncature.

Le développement limité à l'ordre n de f en a peut se ramener à celui de $h \mapsto f(a+h)$ en 0. Signe de f au voisinage de a .

Développement limité en 0 d'une fonction paire, impaire. Caractérisation de la dérivabilité par l'existence d'un développement limité à l'ordre 1.

Opérations sur les développements limités : combinaison linéaire, produit, quotient.

On privilégie la factorisation par le terme prépondérant pour prévoir l'ordre d'un développement. Les étudiants doivent savoir déterminer sur des exemples simples le développement limité d'une composée, mais aucun résultat général n'est exigible.

Primitivation d'un développement limité.

Formule de Taylor-Young : pour f de classe \mathcal{C}^n , développement limité à l'ordre n en 0 de $h \mapsto f(a+h)$.

Développement limité à tout ordre en 0 de \exp , \sin , \cos , sh , ch , $x \mapsto \ln(1+x)$, $x \mapsto \frac{1}{1-x}$, $x \mapsto (1+x)^\alpha$, Arctan .

Développement limité à l'ordre 3 en 0 de \tan .

Application des développements limités à l'étude locale d'une fonction.

Calculs d'équivalents et de limites, position relative d'une courbe et de sa tangente, détermination d'asymptotes.

Condition nécessaire, condition suffisante à l'ordre 2 pour un extremum local en un point intérieur.

Problèmes d'analyse asymptotique

Exemples de développements asymptotiques, dans les cadres discret et continu : fonctions réciproques, équations à paramètre, suites récurrentes, suites d'intégrales.

La notion d'échelle de comparaison est hors programme.

Formule de Stirling. Traduction comme développement asymptotique de $\ln(n!)$.

La démonstration n'est pas exigible.



Table des matières

19 Analyse asymptotique	1
I Développements limités	3
1 Définition	3
2 Unicité et troncature	4
3 Parité	4
4 Primitivation	5
5 Existence et calculs de développements limités	6
a Conditions nécessaires et suffisantes	6
b Condition suffisante	7
c Développements limités usuels	7
d Opérations algébriques	9
e Composition et quotients	10
6 Développement limité en $\pm\infty$	10
7 Développement limité généralisé	11
II Applications des développements limités	11
1 Recherche d'équivalents et de limites	11
2 Étude locale d'une courbe	11
a Signe local	11
b Condition nécessaire et suffisante d'extremum local	12
c Tangente	12
3 Asymptote	13
III Exemples de développements asymptotiques	13
1 Définition	13
2 Suite définie implicitement	14

Dans tout le chapitre, \mathbb{K} désigne indifféremment \mathbb{R} ou \mathbb{C} .

Développements limités

1 Définition

Définition 1

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$, $a \in \mathbb{R}$ élément ou borne de I .

On dit que f admet un **développement limité d'ordre n en a** (abrégé en $DL_n(a)$) lorsque l'on a $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tels que

$$f(x) = \underbrace{a_0 + a_1(x-a) + \dots + a_n(x-a)^n}_{\text{partie régulière}} + o_{x \rightarrow a}(x-a)^n$$

ie

$$f(a+h) = a_0 + a_1h + \dots + a_nh^n + o_{h \rightarrow 0}(h^n)$$

ie on a une fonction ε telle que $\varepsilon(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$ et

$$f(a+h) = a_0 + a_1h + \dots + a_nh^n + h^n\varepsilon(h)$$

Remarques 1

R1 – Quitte à poser $x = a+h$ c'est-à-dire $h = x-a$, un $DL_n(a)$ peut toujours se ramener à un $DL_n(0)$.

R2 – Les termes sont toujours écrits par négligeabilité croissante :

$$a_0 \gg_{h \rightarrow 0} h \gg_{h \rightarrow 0} h^2 \gg_{h \rightarrow 0} \dots \gg_{h \rightarrow 0} h^n \gg_{h \rightarrow 0} o(h^n)$$

On rappelle au passage que si $n > p$, $h^n = o_{h \rightarrow 0}(h^p)$.

R3 – Cela permet d'avoir des renseignements sur le comportement **local** de f , au voisinage de a . Cela ne dit absolument rien sur le comportement global de la fonction.

R4 – On parle aussi de **développement limité fort** lorsque l'on a une expression de la forme

$$f(a+h) = a_0 + a_1h + \dots + a_nh^n + o_{h \rightarrow 0}(h^{n+1})$$

Comme pour toute constante c , $ch^{n+1} + o_{h \rightarrow 0}(h^n) = o_{h \rightarrow 0}(h^{n+1})$, il suffit de posséder un DL à l'ordre $n+1$ pour posséder un DL fort à l'ordre n .

Cela nous sera peu utile pour le moment, mais sera un précieux atout pour l'étude des séries en fin d'année et l'an prochain.

Exemples 1

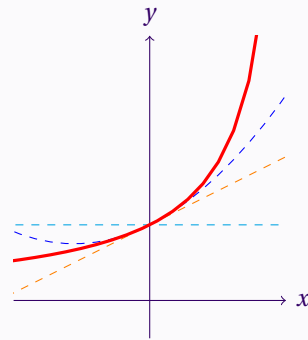
E1 – $\cos x - 1 \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -\frac{x^2}{2}$ donc $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o_{x \rightarrow 0}(x^2)$ est un $DL_2(0)$ de \cos .

E2 – Si $|x| < 1$, $1 + x + \dots + x^n = \frac{1}{1-x} - \frac{x}{1-x}x^n$ donc $\frac{1}{1-x} = 1 + x + \dots + x^n + \underbrace{\frac{x}{1-x}x^n}_{\xrightarrow{x \rightarrow 0} 0} = o_{x \rightarrow 0}(x^n)$.

À connaître parfaitement : les $DL_n(0)$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \dots + (-1)^n x^n + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$$

Figure 1 – $f: x \mapsto \frac{1}{1-x}$ et ses approximations aux ordres 0, 1 et 2E3 – $DL_n(2)$ de $\frac{1}{x}$.

2 Unicité et troncature

Propriété 1

- (i) Si f admet un $DL_n(a)$ avec au moins un terme non nul dans la partie régulière, alors f est équivalente en a au **premier terme non nul** de celle-ci.
- (ii) Si f admet un $DL_n(a)$, les coefficients de celui-ci sont uniques.
- (iii) Si f admet un $DL_n(a)$, alors pour tout $p \leq n$, f admet un $DL_p(a)$ de mêmes coefficients.

Démonstration

- (i) Si le premier terme non nul en celui de degré i_0 , alors on peut écrire

$$f(a+h) = a_{i_0} h^{i_0} + o_{h \rightarrow 0}(h^{i_0})$$

avec $a_{i_0} \neq 0$ donc $f(a+h) \underset{h \rightarrow 0}{\sim} a_{i_0} h^{i_0}$ donc $f(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} a_{i_0} (x-a)^{i_0}$.

- (ii) Si $f(a+h) = a_0 + a_1 h + \dots + a_n h^n + o(h^n) = b_0 + b_1 h + \dots + b_n h^n + o(h^n)$ alors

$$(a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)h + \dots + (a_n - b_n)h^n = h^n \varepsilon(h)$$

avec $\varepsilon(h) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$.

En faisant $h \rightarrow 0$, on obtient $a_0 = b_0$ et donc $(a_1 - b_1) + \dots + (a_n - b_n)h^{n-1} = h^{n-1} \varepsilon(h)$. Et ainsi de suite, par récurrence finie, on obtient que $a_i = b_i$ pour tout $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$.

- (iii) $a_{p+1} h^{p+1} + \dots + a_n h^n + o(h^n) = o(h^p)$ et unicité du DL. \square

3 Parité

Propriété 2

Si f est paire, respectivement impaire, les $DL_n(0)$ de f n'ont que des termes de degrés pairs, respectivement impairs.
(Plus exactement, les autres termes sont nuls).

Remarque 1

Ce n'est valable qu'en 0 et la réciproque est fausse.

Démonstration

Unicité du DL en développant $f(x)$ et $f(-x)$ au voisinage de 0. ■

Remarque 2 : importante!

Si f est paire, les $DL_{2n}(0)$ et $DL_{2n+1}(0)$ de f ont même partie régulière. Il suffit de changer $o(x^{2n})$ en $o(x^{2n+1})$.

4 Primitivation

Propriété 3 : Primitivation de DL

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ admettant un $DL_n(a)$ avec $a \in I$

$$f(x) = a_0 + \dots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

Toute primitive F de f sur I admet un $DL_{n+1}(a)$

$$F(x) = \boxed{F(a)} + a_0(x-a) + \frac{a_1}{2}(x-a)^2 + \dots + \frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1} + o((x-a)^{n+1})$$

obtenu par primitivation terme à terme du DL de f .

Démonstration

On peut supposer $a = 0$ quitte à poser $g(x) = f(a+x)$.

$$f(x) = a_0 + \dots + a_n x^n + o(x^n)$$

Soit $\varphi(x) = F(x) - F(a) - a_0 x - \frac{a_1}{2} x^2 - \dots - \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$.

On veut montrer que $\varphi(x) = o(x^{n+1})$.

Or φ est dérivable sur I et $\varphi' : x \mapsto f(x) - a_0 - \dots - a_n x^n = o(x^n)$.

Soit $\varepsilon > 0$. On a $\eta > 0$ tel que si $|t| \leq \eta$, $|\varphi'(t)| \leq \varepsilon |t|^n$.

En particulier, si $x \neq 0$ et $|x| \leq \eta$, alors $|\varphi'(t)| \leq \underbrace{\varepsilon |x|^n}_{\text{indépendant de } t}$ sur $]0; x[$.

Par inégalité des accroissements finis, $|\varphi(x) - \varphi(0)| = |\varphi(x)| \leq \varepsilon |x|^n |x - 0| = \varepsilon |x|^{n+1}$
 Donc $\varphi(x) = o(x^{n+1})$. ■



Corollaire 1 : Dérivation de DL

On suppose que

H1 f dérivable sur I ;

H2 f admet un DL_n en $a \in I$

$$f(x) = a_0 + \dots + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

H3 f' admet un DL_{n-1} en a

alors celui-ci s'obtient en dérivant terme à terme :

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x-a) + \dots + na_n(x-a)^{n-1} + o((x-a)^{n-1}).$$

Démonstration

Il suffit de primitiver le DL_{n-1} de f' avec la propriété précédente et d'invoquer l'unicité du DL. ■

Remarque 3



Il est possible que f' n'admette pas de DL! Voir contre-exemple ci-après.

5 Existence et calculs de développements limités



Conditions nécessaires et suffisantes

Propriété 4

(i) f admet un $DL_0(a)$ de partie régulière a_0 si et seulement si f admet une limite en a (éventuellement à gauche/à droite lorsque f est définie à gauche/à droite de a).

Le cas échéant, cette limite vaut a_0 .

En particulier, si f est définie en a , f admet un DL_0 en a si et seulement si f est continue en a et alors $a_0 = f(a)$.

(ii) Si f est définie en a , f admet un DL_1 en a si et seulement si f est dérivable en a .

Le cas échéant, $a_0 = f(a)$ et $a_1 = f'(a)$.

Si f n'est pas définie en a , f admet un DL_1 en a si et seulement si f est prolongeable en a en une fonction \tilde{f} dérivable en a et alors $a_0 = \tilde{f}(a)$ et $a_1 = \tilde{f}'(a)$.

Démonstration

(i) $f(x) = a_0 + o(1) \iff f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} a_0.$

(ii) $f(x) = a_0 + a_1(x-a) + o(x-a) \iff f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} a_0$ et $\frac{f(x) - a_0}{x-a} \xrightarrow{x \rightarrow a} a_1.$ ■

Exemple 1

Si $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$, alors $f(x) = o(x)$ est un $DL_1(0)$ de f (et au passage f est dérivable en 0).

Or $f'(x) = 2x \sin \frac{1}{x} - \cos \frac{1}{x}$ n'admet pas de limite en 0 donc f' n'admet pas de $DL_0(0)$.

b Condition suffisante

Théorème 1 : Formule de Taylor-Young

Si $f : I \rightarrow \mathbb{K}$, $a \in I$ tel que f soit de classe \mathcal{C}^n sur I , alors f admet un DL_n en a

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + o((x - a)^n)$$

ie

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n + o(h^n)$$

⚠ La réciproque est fautive : l'existence d'un DL_n en a n'implique pas en général que f est n fois dérivable en a si $n \geq 2$.

Remarque 4

L'hypothèse du programme officielle est f de classe \mathcal{C}^n , mais il suffit qu'elle soit $n - 1$ fois dérivable et que $f^{(n-1)}$ soit dérivable en a .

Démonstration

On a déjà vu que c'est vrai pour $n = 1$.

Si c'est vrai à l'ordre $n - 1$, et si f admet une dérivée d'ordre $n \geq 1$ en a , alors f' admet une dérivée d'ordre $n - 1$ en a et par hypothèse de récurrence,

$$f'(x) = f'(a) + f''(a)(x - a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{(n - 1)!}(x - a)^{n-1} + o((x - a)^{n-1}).$$

Alors, par primitivation de DL,

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + o((x - a)^n)$$

ce qui établit la récurrence.

Pour la réciproque, si $f(x) = x^3 \sin \frac{1}{x}$ prolongé par continuité par 0 en 0, on a $f(x) = o(x^2)$ qui est un DL_2 de f en 0 et pourtant $f' : x \mapsto 3x^2 \sin \frac{1}{x} - x \cos \frac{1}{x}$ si $x \neq 0$ et 0 sinon n'est pas dérivable en 0. ■

c Développements limités usuels

Propriété 5 : DL(0) usuels de exp, cos, sin, ch, sh

- $\exp x = 1 + x + \dots + \frac{x^n}{n!} + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$
- $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!} + \begin{cases} o_{x \rightarrow 0}(x^{2n}) \\ o_{x \rightarrow 0}(x^{2n+1}) \end{cases}$
- $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \dots + \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \begin{cases} o_{x \rightarrow 0}(x^{2n+1}) \\ o_{x \rightarrow 0}(x^{2n+2}) \end{cases}$
- $\operatorname{ch} x = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \dots + \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \begin{cases} o_{x \rightarrow 0}(x^{2n}) \\ o_{x \rightarrow 0}(x^{2n+1}) \end{cases}$
- $\operatorname{sh} x = x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \dots + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \begin{cases} o_{x \rightarrow 0}(x^{2n+1}) \\ o_{x \rightarrow 0}(x^{2n+2}) \end{cases}$

Démonstration

Formule de Taylor-Young. ■



Remarques 2 : Moyens mnémotechniques

- R1 – ch et sh sont les parties paire et impaire de exp.
- R2 – cos = ch alterné = $\Re(e^{ix})$
- R3 – sin = sh alterné = $\Im(e^{ix})$

Propriété 6 : DL_n(0) de (1+x)^α

Si $\alpha \in \mathbb{R}$ fixe,

$$(1+x)^\alpha = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 + \dots + \underbrace{\frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-n+1)}{n!}}_{\text{noté } \binom{\alpha}{n}} x^n + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$$

Démonstration

Formule de Taylor-Young.

Exemples 2

- E1 – $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-3)}{2 \times 4 \times \dots \times (2n)} x^n + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$.
- E2 – $\frac{1}{\sqrt{1+x}}, \alpha = -\frac{1}{2}, \binom{-1/2}{n} = \frac{(-1)^n (2n)!}{4^n n!} = (-1)^n \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)}{2 \times 4 \times \dots \times (2n)}$.

Propriété 7 : DL(0) de $\frac{1}{1-x}, \frac{1}{1+x}, \ln(1-x), \ln(1+x), \text{Arctan } x$

- $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$
- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$
- $\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + \dots + (-1)^n x^n + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$
- $\text{Arctan } x = x - \frac{x^3}{3} + \dots + \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1} + \begin{cases} o_{x \rightarrow 0}(x^{2n+1}) \\ o_{x \rightarrow 0}(x^{2n+2}) \end{cases}$
- $\ln(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \dots - \frac{x^n}{n} + o_{x \rightarrow 0}(x^n)$

S

Démonstration

Les deux premiers ont été vu (somme géométrique), les trois suivants s'obtiennent par primitivation.

Exemples 3

- E1 – $\tan^2 x \sim x^2$ donc $\tan'(x) = 1 + x^2 + o(x^2)$ donc, par imparité, $\tan x = 0 + x + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$.
 $\text{th}^2 x \sim x^2$ donc $\text{th}'(x) = 1 - x^2 + o(x^2)$ donc $\text{th } x = 0 + x - \frac{x^3}{3} + o(x^4)$.
- E2 – DL₄(0) de Arcsin par primitive : $\text{Arcsin } x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^4)$.

d Opérations algébriques

Propriété 8

Si f et g admettent des $DL_n(a)$, toute combinaison linéaire de f et g admet un $DL_n(a)$ dont la partie régulière est la combinaison linéaire des parties régulières.

$f \times g$ admet un $DL_n(a)$ de partie régulière la troncature des parties régulières aux termes $(x - a)^k$ avec $k \leq n$.

Démonstration

En $a = 0$,

Pour $\alpha f + \beta g : \alpha o(x^n) + \beta o(x^n) = o(x^n)$.

Pour $f \times g$, en notant $p_n(x)$ et $q_n(x)$ les parties régulières,

$$(les\ termes\ de\ degré\ > n\ dans\ p_n \times q_n) + p_n(x) \times o(x^n) + q_n(x) \times o(x^n) + o(x^n) \times o(x^n)$$

est un $o(x^n)$. ■

Exemples 4

E1 – $DL_4(0) : e^x + \sin x = 1 + 2x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^4)$.

E2 – $DL_4(0)$: on optimise en considérant la forme « normalisée » du DL (en factorisant par le terme de plus bas degré).

$$e^x \sin x = x + x^2 + \frac{x^3}{3} + o(x^4)$$

Propriété 9 : $DL_7(0)$ de \tan et th

■ $\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + o_{x \rightarrow 0}(x^7)$

■ $\text{th} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} - \frac{17x^7}{315} + o_{x \rightarrow 0}(x^7)$

Remarques 3 : Moyens mnémotechniques

R1 – $17 = 2 + 15$ et $315 = 3 \cdot 15!$

R2 – $\sin = + - + - + - \dots$

$\cos = + - + - + - \dots$

$\tan = \frac{\sin}{\cos} = + + + + + \dots$

Démonstration

\tan admet un $DL_7(0)$ d'après la formule de Taylor-Young, avec seulement des termes de degré impairs. La relation $\tan' = 1 + \tan^2$ et l'unicité des coefficients du DL permet de déterminer facilement les 4 coefficients. ■



e

Composition et quotients



Méthode : Composition de DL

On peut aussi calcul des DL par composition : si f, g admettent des $DL_n(0)$ et si $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$, la partie régulière de $f \circ g$ s'obtient en composant les parties régulières et en ne gardant que les termes de degré au plus n (principe du changement de variable).



Méthode : Quotient de DL

Pour les quotients on se ramène à du $\frac{f(x)}{1 \pm g(x)}$ avec $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$ et on utilise le DL de $\frac{1}{1 \pm x}$.

En général, on considère la forme normalisée du DL (en factorisant par le terme de plus bas degré) pour optimiser l'ordre de développement (pas toujours simple à prévoir!)

Exemples 5

$$E1 - \ln(1 + e^x) = \ln 2 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{8} + o(x^3)$$

$$E2 - \frac{\ln(1+x)}{e^x - 1} = 1 - x + \frac{2}{3}x^2 - \frac{11}{24}x^3 + o(x^3)$$

$$E3 - e^{\cos x} = e - \frac{e}{2}x^2 + \frac{e}{6}x^4 + o(x^5)$$

$$E4 - e^{\cos x} = 1 - \left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^2 - \frac{1}{8}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4 + o\left(\left(x - \frac{\pi}{2}\right)^4\right)$$

$$E5 - DL_5(0) \text{ de } \tan \text{ avec } \frac{\sin}{\cos} \text{ et } \text{Arctan}(\tan) = \text{id.}$$

6

Développement limité en $\pm\infty$

Définition 2

On dit que $f: I \rightarrow \mathbb{K}$ tel que $\pm\infty$ borne de I admet un **développement limité à l'ordre n en $\pm\infty$** lorsque $x \mapsto f\left(\frac{1}{x}\right)$ admet un $DL_n(0^\pm)$, c'est-à-dire lorsque l'on a $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tel que

$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \dots + \frac{a_n}{x^n} + o_{x \rightarrow \pm\infty}\left(\frac{1}{x^n}\right).$$

Remarque 5

Souvent, on pose $h = \frac{1}{x}$ lorsque l'on veut étudier une fonction au voisinage de l'infini afin de se ramener au voisinage de 0.

Exemple 2

$$f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 2x} = 1 - \frac{2}{x} + \frac{3}{x^2} - \frac{6}{x^3} + o_{x \rightarrow \pm\infty}\left(\frac{1}{x^3}\right).$$

7 Développement limité généralisé

Définition 3

$f: I \rightarrow \mathbb{K}$ admet un **développement limité généralisé à l'ordre n en 0** si on a $m \in \mathbb{N}$ tel que $x^m f(x)$ admet un $DL_{n+m}(0)$, c'est-à-dire si on a $(a_{-m}, \dots, a_{-1}, a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+m+1}$ tels que

$$f(x) = \frac{a_{-m}}{x^m} + \dots + \frac{a_{-1}}{x} + a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n + o_{x \rightarrow 0}(x^n).$$

Exemple 3

DLG₃(0) de cotan : $\cotan x = \frac{1}{x} - \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + o(x^3).$

II Applications des développements limités

1 Recherche d'équivalents et de limites



Méthode : Recherche d'équivalents et de limites

Pour obtenir un équivalent, il suffit d'avoir un développement limité (éventuellement généralisé) avec au moins un terme non nul. La fonction est équivalente au premier terme non nul (celui qui prédomine, donc). Cela permet en outre d'obtenir l'éventuelle limite de la fonction.

Exemple 4

Équivalent et limite en 0 de

$$f(x) = \frac{2 \tan x - \tan(2x)}{(1 - \cos(3x))(\sqrt{1+x}-1)}$$

2 Étude locale d'une courbe

a Signe local



Méthode : Signe local

Si f admet un $DL_n(a)$ (éventuellement généralisé) de la forme

$$f(a+h) = a_p h^p + \dots + a_n h^n + o(h^n)$$

avec $a_p \neq 0$, alors $f(x) \sim a_p(x-a)^p$ en a .

Donc, **au voisinage de a ,**

p	$a_p > 0$	$a_p < 0$
pair	$f(x) > 0$	$f(x) < 0$
impair	$f(x) < 0$ si $x < a$	$f(x) > 0$ si $x < a$
	$f(x) > 0$ si $x > a$	$f(x) < 0$ si $x > a$

Cela se généralise au cas d'un développement au voisinage de l'infini.



b Condition nécessaire et suffisante d'extremum local

Propriété 10

Si f est définie en $a \in I$ admet un développement limité en a du type

$$f(a+h) = f(a) + a_n h^n + o(h^n)$$

avec $a_n \neq 0$ alors f présente un extremum local en a **si et seulement si** n est pair.
C'est alors un maximum si $a_n > 0$ et un minimum si $a_n < 0$.

Remarque 6

On retrouve la condition nécessaire $f'(a) = a_1 = 0$ si f est dérivable en a .

Démonstration

$f(x) - f(a) \underset{x \rightarrow a}{\sim} a_n(x-a)^n$ ont même signe au voisinage de a .

Corollaire 2

Si, de plus, f est de classe \mathcal{C}^n , alors $a_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$ d'après la formule de Taylor-Young.
Ainsi, si f est suffisamment régulière, f admet un extremum local en a si et seulement si

$$\min \{k \in \mathbb{N}^* ; f^{(k)}(a) \neq 0\}$$

est pair (s'il existe).

Remarque 7

L'ensemble peut être vide, par exemple pour $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ si $x > 0$, 0 sinon.

Exemple 5

$f(x) = \frac{x}{\tan x}$ si $x \neq 0$ prolongée par continuité en 0 admet un maximum local en 0.

c Tangente



Méthode : Tangente et position relative de la courbe

Si $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ et $a \in I$ tel que

$$f(x) = f(a) + a_1(x-a) + a_n(x-a)^n + o((x-a)^n)$$

avec $a_n \neq 0$, f est dérivable en a , $a_1 = f'(a)$ et

$$f(x) - \underbrace{(f(a) + f'(a)(x-a))}_{\text{équation de la tangente}} \underset{x \rightarrow a}{\sim} a_n(x-a)^n.$$

	n pair	n impair
$a_n > 0$	courbe loc. au-dessus de la tangente localement convexe	courbe traverse la tangente point d'inflexion
$a_n < 0$	courbe loc. au-dessous de la tangente localement concave	courbe traverse la tangente point d'inflexion

Exemple 6

$f(x) = \frac{\ln(1+x)}{x}$ prolongé par continuité en 0.

3 Asymptote



Méthode : Courbes asymptotes

Pour étudier les courbes asymptotes d'une fonction en $\pm\infty$, il suffit d'effectuer un développement asymptotique au voisinage de l'infini pour obtenir une fonction g telle que $f(x) - g(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

Alors la courbe d'équation $y = g(x)$ est asymptote.

Si, par exemple, $f(x) = ax + b + \frac{c}{c^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right)$ avec $c \neq 0$ et $n \geq 1$, alors $y = ax + b$ est asymptote et $f(x) - ax - b \sim \frac{c}{x^n}$ donc suivant le signe de c et la parité de n , on a la position de la courbe par rapport à l'asymptote.

Exemple 7

Étude de $f(x) = (x+1)\text{Arctan } x$ au voisinage de $+\infty$.

Avec $\text{Arctan } x = \frac{\pi}{2} - \text{Arctan } \frac{1}{x}$ pour $x > 0$, on obtient

$$f(x) = \frac{\pi}{2}x + \frac{\pi-2}{2} - \frac{1}{x} + o\left(\frac{1}{x}\right)$$

$y = \frac{\pi}{2}x + \frac{\pi-2}{2}$ est asymptote et la courbe est en dessous.

Exemples de développements asymptotiques

1 Définition

Définition 4

On appelle **développement asymptotique** de f en a toute expression de la forme

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_r(x) + o_{x \rightarrow a}(f_r(x))$$

où f_1, \dots, f_r sont des fonctions telles que $f_1(x) \gg_a f_2(x) \gg_a \dots \gg_a f_r(x)$, c'est-à-dire telles que $\forall k \in [1, r-1], f_{k+1}(x) = o_{x \rightarrow a}(f_k(x))$. On dit que le développement asymptotique est **à la précision** $f_r(x)$.



Méthode

On a toujours que

$$f(x) - f_1(x) - \dots - f_k(x) \underset{x \rightarrow a}{\sim} f_{k+1}(x).$$

C'est un des moyens de former un développement asymptotique : par la recherche d'équivalents successifs : on trouve $f(x) \sim f_1(x)$ puis $f(x) - f_1(x) \sim f_2(x)$ et ainsi de suite.

Un autre méthode usuelle consiste à se ramener à un développement limité.

Exemples 6

E1 – Développement asymptotique en $+\infty$ de $f : x \mapsto e^{\sqrt{x^2+2x+4}}$ à la précision $\frac{e^x}{x}$.

$$e^{\sqrt{x^2+2x+4}} = e \cdot e^x + \frac{3e}{2} \cdot \frac{e^x}{x} + o\left(\frac{e^x}{x}\right)$$

E2 – Développement asymptotique en $+\infty$ de $f : x \mapsto \ln(\operatorname{ch} x)$ à la précision e^{-4x} . Asymptote ?

$$\ln(\operatorname{ch} x) = x - \ln 2 + e^{-2x} - \frac{1}{2}e^{-4x} + o(e^{-4x})$$

$y = x - \ln 2$ asymptote et la courbe est au-dessus.

E3 – Développement asymptotique à trois termes de $x^{1+\frac{1}{x}}$ en $+\infty$. Asymptote ?

$$x^{1+\frac{1}{x}} = xe^{\frac{\ln x}{x}} = x \left(1 + \frac{\ln x}{x} + \frac{\ln^2 x}{2x^2} + o\left(\frac{\ln^2 x}{x^2}\right) \right) = x + \ln x + \frac{\ln^2 x}{2x} + o\left(\frac{\ln^2 x}{x}\right)$$

avec $\frac{\ln^2 x}{2x} + o\left(\frac{\ln^2 x}{x}\right) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ donc $y = x + \ln x$ est asymptote et la courbe est au-dessus.

2 Suite définie implicitement



Méthode

Pas de méthode générique pour étudier asymptotiquement une suite définie implicitement.

Il faut en général bien prendre le temps d'étudier sa définition pour en tirer un maximum d'informations.

Il arrive souvent que l'on détermine un début de développement que l'on réinjecte dans une relation qui nous a permis de l'obtenir pour le pousser un rang plus loin, et ainsi de suite. Voir aussi la méthode de la partie précédente.

Exemples 7

E1 – Unique zéro de $f_n(x) = 1 + x + \frac{e^x}{n}$.

1. Existence de u_n , $u_n \leq -1$, (u_n) croît.
2. Limite de (u_n) .
3. Développement asymptotique à 3 termes.

E2 – u_n unique solution de $\tan x = x$ sur $\left] -\frac{\pi}{2} + n\pi, \frac{\pi}{2} + n\pi \right[$.

1. Existence de u_n .
2. Monotonie et limite de (u_n) .
3. Équivalent de u_n .
4. Développement asymptotique à 2 termes de u_n en posant $v_n = u_n - n\pi = \operatorname{Arctan} u_n$.
5. Développement asymptotique à 4 termes de u_n en réutilisant v_n .