19 Analyse asymptotique

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne indifféremment $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Développements limités

1 Définition

Définition 1

Soit $f : I \to \mathbb{K}$, $a \in \mathbb{R}$ élément ou borne de I.

On dit que f admet un **développement limité d'ordre n en a** (abrégé en $\mathrm{DL}_n(a)$) lorsque l'on a $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tels que

ie

ie on a une fonction ε telle que $\varepsilon(h) \xrightarrow[h\to 0]{} 0$ et

Remarques 1

R 1 – Quitte à poser $x = a + h$ c'est-à-dire $h = x - a$, un $\mathrm{DL}_n(a)$ peut toujours se ramener à un $\mathrm{DL}_n(0)$.

R 2 – Les termes sont toujours écrits par négligeabilité croissante :

$$a_0 \underset{h\to 0}{\gg} h \underset{h\to 0}{\gg} h^2 \underset{h\to 0}{\gg} \cdots \underset{h\to 0}{\gg} h^n \underset{h\to 0}{\gg} \mathrm{o}(h^n)$$

On rappelle au passage que si $n > p$, $h^n = \underset{h\to 0}{\mathrm{o}}(h^p)$.

R 3 – Cela permet d'avoir des renseignements sur le comportement **local** de f, au voisinage de a. Cela ne dit absolument rien sur le comportement global de la fonction.

R 4 – On parle aussi de **développement limité fort** lorsque l'on a une expression de le forme

$$f(a+h) = a_0 + a_1 h + \cdots + a_n h^n + \underset{h\to 0}{\mathcal{O}}\left(h^{n+1}\right)$$

Comme pour toute constante c, $ch^{n+1} + \underset{h\to 0}{\mathrm{o}}(h^n) = \underset{h\to 0}{\mathcal{O}}\left(h^{n+1}\right)$, il suffit de posséder un DL à l'ordre $n+1$ pour posséder un DL fort à l'ordre n.

Cela nous sera peu utile pour le moment, mais sera un précieux atout pour l'étude des séries en fin d'année et l'an prochain.

Exemples 1

E 1 – $\mathrm{DL}_2(0)$ de $\cos$

E 2 – $\mathrm{DL}_n(0)$ de $\dfrac{1}{1 \pm x}$

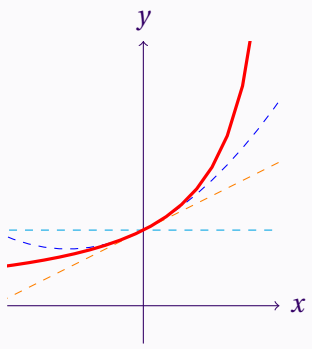

Figure 1 – $f : x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$ et ses approximations aux ordres 0, 1 et 2

E 3 – $\mathrm{DL}_n(2)$ de $\dfrac{1}{x}$.

2 Unicité et troncature

Propriété 1

(i) Si f admet un $\mathrm{DL}_n(a)$ avec au moins un terme non nul dans la partie régulière, alors f est équivalente en a au premier terme non nul de celle-ci.

(ii) Si f admet un $\mathrm{DL}_n(a)$, les cœfficients de celui-ci sont uniques.

(iii) Si f admet un $\mathrm{DL}_n(a)$, alors pour tout $p \leqslant n$, f admet un $\mathrm{DL}_p(a)$ de mêmes cœfficients.

3 Parité

Propriété 2

Si f est paire, respectivement impaire, les $\mathrm{DL}_n(0)$ de f n'ont que des termes de degrés pairs, respectivement impairs.

(Plus exactement, les autres termes sont nuls).

CC BY NC SA

Remarque 1

Ce n'est valable qu'en 0 et la réciproque est fausse.

Remarque 2 : importante !

Si f est paire, les $\mathrm{DL}_{2n}(0)$ et $\mathrm{DL}_{2n+1}(0)$ de f ont même partie régulière.

Il suffit de changer $\mathrm{o}\left(x^{2n}\right)$ en $\mathrm{o}\left(x^{2n+1}\right)$.

4 Primitivation

Propriété 3 : Primitivation de DL

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ admettant un $\mathrm{DL}_n(a)$ avec $a \in I$

$$f(x) = a_0 + \cdots + a_n(x-a)^n + \mathrm{o}\left((x-a)^n\right)$$

Toute primitive F de f sur I admet un $\mathrm{DL}_{n+1}(a)$ obtenu par primitivation terme à

terme du DL de f.

Corollaire 1 : Dérivation de DL

On suppose que

H1

H2

H3

alors celui-ci s'obtient en dérivant terme à terme :

Remarque 3

⚠ Il est possible que f' n'admette pas de DL ! Voir contre-exemple ci-après.

5 Existence et calculs de développements limités

a Conditions nécessaires et suffisantes

Propriété 4

(i) f admet un $\mathrm{DL}_0(a)$ de partie régulière a_0 si et seulement si f admet une limite en a (éventuellement à gauche/à droite lorsque f est définie à gauche/à droite de a).

Le cas échéant, cette limite vaut a_0.

En particulier, si f est définie en a, f admet un DL_0 en a si et seulement si f est continue en a et alors $a_0 = f(a)$.

(ii) Si f est définie en a, f admet un DL_1 en a si et seulement si f est dérivable en a.

Le cas échéant, $a_0 = f(a)$ et $a_1 = f'(a)$.

Si f n'est pas définie en a, f admet un DL_1 en a si et seulement si f est prolongeable en a en une fonction $\tilde{f}$ dérivable en a et alors $a_0 = \tilde{f}(a)$ et $a_1 = \tilde{f}'(a)$.

Exemple 1

$$f : x \mapsto x^2 \sin \frac{1}{x}$$

b Condition suffisante

Théorème 1 : Formule de Taylor-Young

Si $f : I \to \mathbb{K}$, $a \in I$ tel que f soit de classe $\mathscr{C}^n$ sur I, alors f admet un DL_n en a

ie

⚠ *La réciproque est fausse : l'existence d'un DL_n en a n'implique pas en général que f est n fois dérivable en a si $n \geqslant 2$.*

Remarque 4

L'hypothèse du programme officielle est f de classe $\mathscr{C}^n$, mais il suffit qu'elle soit $n-1$ fois dérivable et que $f^{(n-1)}$ soit dérivable en a.

c Développements limités usuels

Propriété 5 : DL(0) usuels de exp, cos, sin, ch, sh

- $\exp x =$
- $\cos x =$
- $\sin x =$
- $\operatorname{ch} x =$
- $\operatorname{sh} x =$

Remarques 2 : Moyens mnémotechniques

R 1 – ch et sh sont les parties paire et impaire de exp.

R 2 – $\cos = \operatorname{ch}$ alterné $= \mathfrak{Re}\left(e^{ix}\right)$

R 3 – $\sin = \operatorname{sh}$ alterné $= \mathfrak{Im}\left(e^{ix}\right)$

Propriété 6 : $\mathrm{DL}_n(0)$ de $(1+x)^\alpha$

Si $\alpha \in \mathbb{R}$ fixe,
$(1+x)^\alpha =$

Exemples 2

E 1 – $\mathrm{DL}_n(0)$ de $\sqrt{1+x}$

E 2 – $\mathrm{DL}_n(0)$ de $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$

Propriété 7 : DL(0) de $\frac{1}{1-x}$, $\frac{1}{1+x}$, $\ln(1-x)$, $\ln(1+x)$, $\operatorname{Arctan} x$

- $\dfrac{1}{1-x} =$
- $\dfrac{1}{1+x} =$
- $\ln(1-x) =$
- $\ln(1+x) =$
- $\operatorname{Arctan} x =$

S

Exemples 3

E 1 – $\mathrm{DL}_4(0)$ de tan

E 2 – $\mathrm{DL}_4(0)$ de Arcsin

d Opérations algébriques

Propriété 8

Si f et g admettent des $\mathrm{DL}_n(a)$, toute combinaison linéaire de f et g admet un $\mathrm{DL}_n(a)$ dont la partie régulière est la combinaison linéaire des parties régulières.

$f \times g$ admet un $\mathrm{DL}_n(a)$ de partir régulière la troncature des parties régulières aux termes $(x-a)^k$ avec $k \leqslant n$.

CC BY NC SA

Exemples 4

E 1 – $\mathrm{DL}_4(0)$ de $e^x + \sin x$

E 2 – $\mathrm{DL}_4(0)$ de $e^x \sin x$

Propriété 9 : $\mathrm{DL}_7(0)$ de $\tan$ et th

- $\tan x =$
- $\mathrm{th}\, x =$

Remarques 3 : Moyens mnémotechniques

R 1 – $17 = 2 + 15$ et $315 = 3\ 15!$

R 2 – $\sin = + - + - + - \cdots$

$\cos = + - + - + - \cdots$

$\tan = \dfrac{\sin}{\cos} = + + + + + + \cdots$

e Composition et quotients

Méthode : Composition de DL

On peut aussi calcul des DL par composition : si f, g admettent des $\mathrm{DL}_n(0)$ et si $g(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, la partie régulière de $f \circ g$ s'obtient en composant les parties régulières et en ne gardant que les termes de degré au plus n (principe du changement de variable).

Méthode : Quotient de DL

Pour les quotients on se ramène à du $\dfrac{f(x)}{1 \pm g(x)}$ avec $g(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ et on utilise le DL de $\dfrac{1}{1 \pm x}$.

En général, on considère la forme normalisée du DL (en factorisant par le terme de plus bas degré) pour optimiser l'ordre de développement (pas toujours simple à prévoir !)

Exemples 5

E 1 – $\mathrm{DL}_3(0)$ de $\ln(1 + e^x)$

E 2 – $\mathrm{DL}_3(0)$ de $\dfrac{\ln(1+x)}{e^x - 1}$

E 3 – $\mathrm{DL}_5(0)$ de $e^{\cos x}$

E 4 – $\mathrm{DL}_4\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ de $e^{\cos x}$

E 5 – $\mathrm{DL}_5(0)$ de $\tan$ avec $\dfrac{\sin}{\cos}$ et $\mathrm{Arctan}(\tan) = \mathrm{id}$.

6 Développement limité en $\pm\infty$

Définition 2

On dit que $f : I \to \mathbb{K}$ tel que $\pm\infty$ borne de I admet un **développement limité à l'ordre n en $\pm\infty$** lorsque $x \mapsto f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ admet un $\mathrm{DL}_n(0^\pm)$, c'est-à-dire lorsque l'on a $(a_0, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tel que

Remarque 5

Souvent, on pose $h = \dfrac{1}{x}$ lorsque l'on veut étudier une fonction au voisinage de l'infini afin de se ramener au voisinage de 0.

Exemple 2

$\mathrm{DL}_3(\pm\infty)$ de $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 2x}$

7 Développement limité généralisé

Définition 3

$f : I \to \mathbb{K}$ admet un **développement limité généralisé à l'ordre n en 0** si on a $m \in \mathbb{N}$ tel que $x^m f(x)$ admet un $\mathrm{DL}_{n+m}(0)$, c'est-à-dire si on a $(a_{-m}, \ldots, a_{-1}, a_0, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+m+1}$ tels que

Exemple 3

$\mathrm{DLG}_3(0)$ de cotan

II Applications des développements limités

1 Recherche d'équivalents et de limites

Méthode : Recherche d'équivalents et de limites

Pour obtenir un équivalent, il suffit d'avoir un développement limité (éventuellement généralisé) avec au moins un terme non nul. La fonction est équivalente au premier terme non nul (celui qui prédomine, donc).

Cela permet en outre d'obtenir l'éventuelle limite de la fonction.

Exemple 4

Équivalent et limite en 0 de

$$f(x) = \frac{2\tan x - \tan(2x)}{(1-\cos(3x))\left(\sqrt{1+x}-1\right)}$$

.

2 Étude locale d'une courbe

a Signe local

Méthode : Signe local

Si f admet un $\mathrm{DL}_n(a)$ (éventuellement généralisé) de la forme

$$f(a+h) = a_p h^p + \ldots + a_n h^n + \mathrm{o}\left(h^n\right)$$

avec $a_p \neq 0$, alors $f(x) \sim a_p(x-a)^p$ en a.

Donc, **au voisinage de** a,

p	$a_p > 0$	$a_p < 0$
pair		
impair		

Cela se généralise au cas d'un développement au voisinage de l'infini.

b Condition nécessaire et suffisante d'extremum local

Propriété 10

Si f est définie en $\boxed{a \in \mathring{I}}$ admet un développement limité en a du type

$$f(a+h) = f(a) + a_n h^n + \mathrm{o}\left(h^n\right)$$

avec $a_n \neq 0$ alors f présente un extremum local en a si et seulement si

C'est alors un maximum si et un minimum si

Remarque 6

On retrouve la condition nécessaire $f'(a) = a_1 = 0$ si f est dérivable en a.

Corollaire 2

Si, de plus, f est de classe $\mathscr{C}^n$, alors $a_n = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$ d'après la formule de Taylor-Young.

Ainsi, si f est suffisamment régulière, f admet un extremum local en a si et seulement si

$$\min\left\{k \in \mathbb{N}^* \ ; \ f^{(k)}(a) \neq 0\right\}$$

est pair (s'il existe).

Remarque 7

L'ensemble peut être vide, par exemple pour $f(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{x}}$ si $x > 0$, 0 sinon.

Exemple 5

$f(x) = \dfrac{x}{\tan x}$ si $x \neq 0$ prolongée par continuité en 0 admet un maximum local en 0.

CC BY NC SA

C Tangente

Méthode : Tangente et position relative de la courbe

Si $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$ tel que

$$f(x) = f(a) + a_1(x-a) + a_n(x-a)^n + \mathrm{o}\left((x-a)^n\right)$$

avec $a_n \neq 0$, f est dérivable en a, $a_1 = f'(a)$ et

$$f(x) - \underbrace{\left(f(a) + f'(a)(x-a)\right)}_{\text{équation de la tangente}} \underset{x\to a}{\sim} a_n(x-a)^n.$$

	n pair	n impair
$a_n > 0$		
$a_n < 0$		

Exemple 6

$f(x) = \dfrac{\ln(1+x)}{x}$ prolongé par continuité en 0.

3 Asymptote

Méthode : Courbes asymptotes

Pour étudier les courbes asymptotes d'une fonction en $\pm\infty$, il suffit d'effectuer un développement asymptotique au voisinage de l'infini pour obtenir une fonction g telle que $f(x) - g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

Alors la courbe d'équation $y = g(x)$ est asymptote.

Si, par exemple, $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{c^n} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x^n}\right)$ avec $c \neq 0$ et $n \geqslant 1$, alors $y = ax + b$ est asymptote et $f(x) - ax - b \sim \dfrac{c}{x^n}$ donc suivant le signe de c et la parité de n, on a la position de la courbe par rapport à l'asymptote.

Exemple 7

Étude de $f(x) = (x+1)\operatorname{Arctan} x$ au voisinage de $+\infty$.

III Exemples de développements asymptotiques

1 Définition

Définition 4

On appelle **développement asymptotique** de f en a toute expression de la forme

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_r(x) + \underset{x\to a}{\mathrm{o}}\left(f_r(x)\right)$$

où $f_1, \ldots, f_r$ sont des fonctions telles que $f_1(x) \underset{x\to a}{\gg} f_2(x) \underset{x\to a}{\gg} \cdots \underset{x\to a}{\gg} f_r(x)$, c'est-à-dire telles que $\forall\, k \in [\![1, r-1]\!]$, $f_{k+1}(x) = \underset{x\to a}{\mathrm{o}}\left(f_k(x)\right)$. On dit que le développement asymptotique est **à la précision** $f_r(x)$.

Remarque 8

On a toujours que

$$f(x) - f_1(x) - \cdots - f_k(x) \underset{x\to a}{\sim} f_{k+1}(x).$$

C'est un des moyen de former un développement asymptotique : par la recherche d'équivalents successifs.

Exemples 6

E 1 – Développement asymptotique en $+\infty$ de $f : x \mapsto \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+2x+4}}$ à la précision $\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}$.

E 2 – Développement asymptotique en $+\infty$ de $f : x \mapsto \ln(\operatorname{ch} x)$ à la précision e^{-4x}. Asymptote ?

E 3 – Développement asymptotique à trois termes de $x^{1+\frac{1}{x}}$ en $+\infty$. Asymptote ?

2 Suite définie implicitement

Méthode

Pas de méthode générique pour étudier asymptotiquement une suite définie implicitement.

Il faut en général bien prendre le temps d'étudier sa définition pour en tirer un maximum d'informations.

Il arrive souvent que l'on détermine un début de développement que l'on réinjecte dans une relation qui nous a permis de l'obtenir pour le pousser un rang plus loin, et ainsi de suite.

Exemples 7

E 1 – Unique zéro de $f_n(x) = 1 + x + \dfrac{\mathrm{e}^x}{n}$.

E 2 – u_n unique solution de $\tan x = x$ sur $\left]-\dfrac{\pi}{2} + n\pi, \dfrac{\pi}{2} + n\pi\right[$.