19

Analyse asymptotique

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne indifféremment $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

I Développements limités

1 Définition

Définition 1

Soit $f : I \to \mathbb{K}$, $a \in \mathbb{R}$ élément ou borne de I.

On dit que f admet un **développement limité d'ordre n en a** (abrégé en $DL_n(a)$) lorsque l'on a $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tels que

$$f(x) = \underbrace{a_0 + a_1(x-a) + \cdots + a_n(x-a)^n}_{\text{partie régulière}} + \underset{x \to a}{\mathrm{o}}\left((x-a)^n\right)$$

ie

$$f(a+h) = a_0 + a_1 h + \cdots + a_n h^n + \underset{h \to 0}{\mathrm{o}}\left(h^n\right)$$

ie on a une fonction ε telle que $\varepsilon(h) \xrightarrow[h \to 0]{} 0$ et

$$f(a+h) = a_0 + a_1 h + \cdots + a_n h^n + h^n \varepsilon(h)$$

2 Unicité et troncature

Propriété 1

(i) *Si f admet un $DL_n(a)$ avec au moins un terme non nul dans la partie régulière, alors f est équivalente en a au* ***premier terme non nul*** *de celle-ci.*

(ii) *Si f admet un $DL_n(a)$, les cœfficients de celui-ci sont uniques.*

(iii) *Si f admet un $DL_n(a)$, alors pour tout $p \leqslant n$, f admet un $DL_p(a)$ de mêmes cœfficients.*

3 Parité

Propriété 2

Si f est paire, respectivement impaire, les $DL_n(0)$ de f n'ont que des termes de degrés pairs, respectivement impairs.

(Plus exactement, les autres termes sont nuls).

4 Primitivation

Propriété 3 : Primitivation de DL

Soit $f : I \to \mathbb{R}$ admettant un $DL_n(a)$ avec $a \in I$

$$f(x) = a_0 + \cdots + a_n(x-a)^n + \mathrm{o}\left((x-a)^n\right)$$

Toute primitive F de f sur I admet un $DL_{n+1}(a)$

$$F(x) = \boxed{F(a)} + a_0(x-a) + \frac{a_1}{2}(x-a)^2 + \cdots + \frac{a_n}{n+1}(x-a)^{n+1} + \mathrm{o}\left((x-a)^{n+1}\right)$$

obtenu par primitivation terme à terme du DL de f.

Corollaire 1 : Dérivation de DL

On suppose que

H1 *f dérivable sur I ;*

H2 *f admet un DL_n en $a \in I$*

$$f(x) = a_0 + \cdots + a_n(x-a)^n + \mathrm{o}\left((x-a)^n\right)$$

H3 $\boxed{f' \text{ admet un } DL_{n-1} \text{ en } a}$

alors celui-ci s'obtient en dérivant terme à terme :

$$f'(x) = a_1 + 2a_2(x-a) + \cdots + n a_n(x-a)^{n-1} + \mathrm{o}\left((x-a)^{n-1}\right).$$

5 Existence et calculs de développements limités

a Conditions nécessaires et suffisantes

Propriété 4

(i) *f admet un $DL_0(a)$ de partie régulière a_0 si et seulement si f admet une limite en a (éventuellement à gauche/à droite lorsque f est définie à gauche/à droite de a).*

Le cas échéant, cette limite vaut a_0.

En particulier, si f est définie en a, f admet un DL_0 en a si et seulement si f est continue en a et alors $a_0 = f(a)$.

(ii) *Si f est définie en a, f admet un DL_1 en a si et seulement si f est dérivable en a.*
Le cas échéant, $a_0 = f(a)$ et $a_1 = f'(a)$.

Si f n'est pas définie en a, f admet un DL_1 en a si et seulement si f est prolongeable en a en une fonction $\tilde{f}$ dérivable en a et alors $a_0 = \tilde{f}(a)$ et $a_1 = \tilde{f}'(a)$.

b Condition suffisante

Théorème 1 : Formule de Taylor-Young

Si $f : I \to \mathbb{K}$, $a \in I$ tel que f soit de classe $\mathscr{C}^n$ sur I, alors f admet un DL_n en a

$$f(x) = f(a)+f'(a)(x-a)+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n+o\left((x-a)^n\right)$$

ie

$$f(a+h) = f(a)+f'(a)h+\cdots+\frac{f^{(n)}(a)}{n!}h^n+o\left(h^n\right)$$

⚠ *La réciproque est fausse : l'existence d'un DL_n en a n'implique pas en général que f est n fois dérivable en a si $n \geqslant 2$.*

c Développements limités usuels

Propriété 5 : DL(0) usuels de $\exp$, $\cos$, $\sin$, ch, sh

- $\exp x = 1+x+\cdots+\dfrac{x^n}{n!}+\underset{x\to 0}{o}(x^n)$
- $\cos x = 1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}-\cdots+\dfrac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}+\left|\begin{array}{l}\underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n}\right)\\ \underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n+1}\right)\end{array}\right.$
- $\sin x = x-\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120}-\cdots+\dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\left|\begin{array}{l}\underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n+1}\right)\\ \underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n+2}\right)\end{array}\right.$
- $\mathrm{ch}\, x = 1+\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^4}{24}+\cdots+\dfrac{x^{2n}}{(2n)!}+\left|\begin{array}{l}\underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n}\right)\\ \underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n+1}\right)\end{array}\right.$
- $\mathrm{sh}\, x = x+\dfrac{x^3}{6}+\dfrac{x^5}{120}+\cdots+\dfrac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\left|\begin{array}{l}\underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n+1}\right)\\ \underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n+2}\right)\end{array}\right.$

Propriété 6 : $DL_n(0)$ de $(1+x)^\alpha$

*Si $\alpha \in \mathbb{R}$ **fixe**,*

$$(1+x)^\alpha = 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2}x^2 +\cdots+\underbrace{\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}}_{\text{noté } \binom{\alpha}{k}}x^n+\underset{x\to 0}{o}(x^n)$$

Propriété 7 : DL(0) de $\frac{1}{1-x}$, $\frac{1}{1+x}$, $\ln(1-x)$, $\ln(1+x)$, $\operatorname{Arctan} x$

- $\dfrac{1}{1-x} = 1+x+x^2+\cdots+x^n+\underset{x\to 0}{o}(x^n)$
- $\dfrac{1}{1+x} = 1-x+x^2+\cdots+(-1)^n x^n+\underset{x\to 0}{o}(x^n)$
- $\ln(1-x) = -x-\dfrac{x^2}{2}-\cdots-\dfrac{x^n}{n}+\underset{x\to 0}{o}(x^n)$
- $\ln(1+x) = x-\dfrac{x^2}{2}+\cdots+(-1)^{n-1}\dfrac{x^n}{n}+\underset{x\to 0}{o}(x^n)$
- $\operatorname{Arctan} x = x-\dfrac{x^3}{3}+\cdots+\dfrac{(-1)^n}{2n+1}x^{2n+1}+\left|\begin{array}{l}\underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n+1}\right)\\ \underset{x\to 0}{o}\left(x^{2n+2}\right)\end{array}\right.$

s

d Opérations algébriques

Propriété 8

Si f et g admettent des $DL_n(a)$, toute combinaison linéaire de f et g admet un $DL_n(a)$ dont la partie régulière est la combinaison linéaire des parties régulières.

$f \times g$ admet un $DL_n(a)$ de partie régulière la troncature des parties régulières aux termes $(x-a)^k$ avec $k \leqslant n$.

Propriété 9 : $DL_7(0)$ de $\tan$ et th

- $\tan x = x+\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{2x^5}{15}+\dfrac{17x^7}{315}+\underset{x\to 0}{o}(x^7)$
- $\mathrm{th}\, x = x-\dfrac{x^3}{3}+\dfrac{2x^5}{15}-\dfrac{17x^7}{315}+\underset{x\to 0}{o}(x^7)$

e Composition et quotients

Méthode : Composition de DL

On peut aussi calcul des DL par composition : si f, g admettent des $\mathrm{DL}_n(0)$ et si $g(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$, la partie régulière de $f\circ g$ s'obtient en composant les parties régulières et en ne gardant que les termes de degré au plus n (principe du changement de variable).

Méthode : Quotient de DL

Pour les quotients on se ramène à du $\dfrac{f(x)}{1\pm g(x)}$ avec $g(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ et on utilise le DL de $\dfrac{1}{1\pm x}$.

En général, on considère la forme normalisée du DL (en factorisant par le terme de plus bas degré) pour optimiser l'ordre de développement (pas toujours simple à prévoir !)

6 Développement limité en $\pm\infty$

Définition 2

On dit que $f : I \to \mathbb{K}$ tel que $\pm\infty$ borne de I admet un **développement limité à l'ordre n en $\pm\infty$** lorsque $x \mapsto f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ admet un $\mathrm{DL}_n(0^{\pm})$, c'est-à-dire lorsque l'on a $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}$ tel que

$$f(x) = a_0 + \frac{a_1}{x} + \cdots + \frac{a_n}{x^n} + \underset{x\to\pm\infty}{\mathrm{o}}\left(\frac{1}{x^n}\right).$$

7 Développement limité généralisé

Définition 3

$f : I \to \mathbb{K}$ admet un **développement limité généralisé à l'ordre n en** 0 si on a $m \in \mathbb{N}$ tel que $x^m f(x)$ admet un $\mathrm{DL}_{n+m}(0)$, c'est-à-dire si on a $(a_{-m}, \dots, a_{-1}, a_0, a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+m+1}$ tels que

$$f(x) = \frac{a_{-m}}{x^m} + \cdots + \frac{a_{-1}}{x} + a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \underset{x\to 0}{\mathrm{o}}\left(x^n\right).$$

II Applications des développements limités

1 Recherche d'équivalents et de limites

Méthode : Recherche d'équivalents et de limites

Pour obtenir un équivalent, il suffit d'avoir un développement limité (éventuellement généralisé) avec au moins un terme non nul. La fonction est équivalente au premier terme non nul (celui qui prédomine, donc).

Cela permet en outre d'obtenir l'éventuelle limite de la fonction.

2 Étude locale d'une courbe

a Signe local

Méthode : Signe local

Si f admet un $\mathrm{DL}_n(a)$ (éventuellement généralisé) de la forme

$$f(a+h) = a_p h^p + \ldots + a_n h^n + \mathrm{o}\left(h^n\right)$$

avec $a_p \neq 0$, alors $f(x) \sim a_p (x-a)^p$ en a.

Donc, **au voisinage de** a,

p	$a_p > 0$	$a_p < 0$
pair	$f(x) > 0$	$f(x) < 0$
impair	$f(x) < 0$ si $x < a$	$f(x) > 0$ si $x < a$
	$f(x) > 0$ si $x > a$	$f(x) < 0$ si $x > a$

Cela se généralise au cas d'un développement au voisinage de l'infini.

b Condition nécessaire et suffisante d'extremum local

Propriété 10

Si f est définie en $\boxed{a \in \mathring{I}}$ admet un développement limité en a du type

$$f(a+h) = f(a) + a_n h^n + \mathrm{o}\left(h^n\right)$$

*avec $a_n \neq 0$ alors f présente un extremum local en a **si et seulement si** n est pair.*

C'est alors un maximum si $a_n > 0$et un minimum si $a_n < 0$.

Corollaire 2

Si, de plus, f est de classe $\mathscr{C}^n$, alors $a_n = \dfrac{f^{(n)}(a)}{n!}$ d'après la formule de Taylor-Young.

Ainsi, si f est suffisamment régulière, f admet un extremum local en a si et seulement si

$$\min\left\{k \in \mathbb{N}^* \;;\; f^{(k)}(a) \neq 0\right\}$$

est pair (s'il existe).

c Tangente

Méthode : Tangente et position relative de la courbe

Si $f : I \to \mathbb{R}$ et $a \in I$ tel que

$$f(x) = f(a) + a_1(x-a) + a_n(x-a)^n + \mathrm{o}\left((x-a)^n\right)$$

avec $a_n \neq 0$, f est dérivable en a, $a_1 = f'(a)$ et

$$f(x) - \underbrace{\left(f(a) + f'(a)(x-a)\right)}_{\text{équation de la tangente}} \underset{x\to a}{\sim} a_n(x-a)^n.$$

	n pair	n impair
$a_n > 0$	courbe loc. au-dessus de la tangente **localement convexe**	courbe traverse la tangente **point d'inflexion**
$a_n < 0$	courbe loc. au-dessous de la tangente **localement concave**	courbe traverse la tangente **point d'inflexion**

3 Asymptote

Méthode : Courbes asymptotes

Pour étudier les courbes asymptotes d'une fonction en $\pm\infty$, il suffit d'effectuer un développement asymptotique au voisinage de l'infini pour obtenir une fonction g telle que $f(x) - g(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$.

Alors la courbe d'équation $y = g(x)$ est asymptote.

Si, par exemple, $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{x^n} + \mathrm{o}\left(\dfrac{1}{x^n}\right)$ avec $c \neq 0$ et $n \geqslant 1$, alors $y = ax+b$ est asymptote et $f(x) - ax - b \sim \dfrac{c}{x^n}$ donc suivant le signe de c et la parité de n, on a la position de la courbe par rapport à l'asymptote.

III Exemples de développements asymptotiques

1 Définition

Définition 4

On appelle **développement asymptotique** de f en a toute expression de la forme

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_r(x) + \underset{x\to a}{\mathrm{o}}\left(f_r(x)\right)$$

où $f_1, \dots, f_r$ sont des fonctions telles que $f_1(x) \underset{x\to a}{\gg} f_2(x) \underset{x\to a}{\gg} \cdots \underset{x\to a}{\gg} f_r(x)$, c'est-à-dire telles que $\forall\, k \in [\![1, r-1]\!]$, $f_{k+1}(x) = \underset{x\to a}{\mathrm{o}}\left(f_k(x)\right)$. On dit que le développement asymptotique est **à la précision** $f_r(x)$.

Méthode

On a toujours que

$$f(x) - f_1(x) - \cdots - f_k(x) \underset{x\to a}{\sim} f_{k+1}(x).$$

C'est un des moyens de former un développement asymptotique : par la recherche d'équivalents successifs : on trouve $f(x) \sim f_1(x)$ puis $f(x) - f_1(x) \sim f_2(x)$ et ainsi de suite.

Un autre méthode usuelle consiste à se ramener à un développement limité.

2 Suite définie implicitement

Méthode

Pas de méthode générique pour étudier asymptotiquement une suite définie implicitement.

Il faut en général bien prendre le temps d'étudier sa définition pour en tirer un maximum d'informations.

Il arrive souvent que l'on détermine un début de développement que l'on réinjecte dans une relation qui nous a permis de l'obtenir pour le pousser un rang plus loin, et ainsi de suite. Voir aussi la méthode de la partie précédente.