Bonjour à tous !

Si $P \in \mathbb{K}[X]$, $P = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$

$$P \times 1 = \sum_{k=0}^{p} a_k \times 1 \times X^k$$ par distributivité

vu comme polynôme

$$= \sum_{k=0}^{p} a_k X^k$$

$$= P$$

Intégrité : Si $P \times Q = 0$

But : $P = 0$ ou $Q = 0$

Alors $-\infty = \deg(P \times Q)$

$$= \underbrace{\deg P}_{\in \mathbb{N} \cup \{-\infty\}} + \underbrace{\deg Q}_{\in \mathbb{N} \cup \{-\infty\}}$$

donc $\deg P = -\infty$ ou $\deg Q = -\infty$

donc $P = 0_{\mathbb{K}[X]}$ ou $Q = 0_{\mathbb{K}[X]}$

Inversibles : Si P est inversible, on a

$Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P \times Q = 1_{\mathbb{K}[X]}$

Alors $P \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$ et $\deg(P \times Q) = 0 = \deg P + \deg Q$

$\in \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$

donc $\deg P \ (= \deg Q) = 0$

donc $P \in \mathbb{K}_0[X] \setminus \{0\}$

Réciproquement, si $P = \lambda$ où $\lambda \in \mathbb{K}^*$

Alors P inversible, d'inverse

$$Q = \lambda^{-1} \in \mathbb{K}_0[X]$$

car $P \times Q = 1 \ (= QP)$ $\square$

<u>Rq</u> : produit de polynômes

$$P \times Q = \sum_{k=0}^{p} a_k X^k \times \sum_{l=0}^{q} b_l X^l = \sum_{\substack{0 \leq k \leq p \\ 0 \leq l \leq q}} a_k b_l X^{k+l}$$

coeff en X^m :

$k + l = m$

	a_0	a_1	a_2	a_3	$\dots$	a_p
b_0	a_0b_0	a_1b_0	a_2b_0	a_3b_0	$\dots$	a_pb_0
b_1	a_0b_1	a_1b_1	a_2b_1	a_3b_1	$\dots$	a_pb_1
b_2	a_0b_2	a_1b_2	a_2b_2	a_3b_2	$\dots$	a_pb_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
b_q	a_0b_q	a_1b_q	a_2b_q	a_3b_q	$\dots$	a_pb_q

X^0

X^1

X^2

X^{p+q}

$$P \times Q = a_0b_0 + (a_1b_0 + a_0b_1)X + \dots + a_pb_qX^{p+q}$$

R2 $f : \left| \begin{array}{ccc} (\mathbb{K}, +, \times) & \longrightarrow & (\mathbb{K}_0[X], +, \times) \\ \lambda & \longmapsto & P = \lambda X^0 + 0X^1 + 0X^2 + \dots \end{array} \right.$

- $\mathbb{K}_0[X]$ sous-anneau de $(\mathbb{K}[X], +, \times)$

  (caractérisation ... $\subset$, $1 \in$, stab. par $-$, $\times$)

- Si $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$, $f(\lambda + \mu) = \underbrace{\lambda + \mu}_{\text{polynôme}} = f(\lambda) + f(\mu)$

  + de $\mathbb{K}$ + de $\mathbb{K}[X]$

  $f(\lambda \times \mu) = f(\lambda) \times f(\mu)$

  $f(1_{\mathbb{K}}) = 1_{\mathbb{K}_0[X]} = 1_{\mathbb{K}[X]}$

donc f mda

- f bijectif de réciproque

$$g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_0[X] & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ P & \longmapsto & \text{coeff constant de } P \end{array} \right.$$

(bien déf par unicité des coeff.)

3) Composition

R1 « $X = Q$ »

polynôme X polynôme $\neq X$ en général

R3. $(2X)^2 = 4X^2 \neq 2(X^2) = 2X^2$

$P = 2X$ et $Q = X^2$ ne commutent pas.

R4. En général, $R \circ (P+Q) \neq R \circ P + R \circ Q$

$R = X^2$, $P = Q = 1$

$(1+1)^2 = 4 \neq 1^2 + 1^2 = 2$ (polynômes constants)

Prop 3

Preuve : $P = a_0 + \dots + a_p X^p$ avec $a_p \neq 0$ ($P \neq 0$)

$Q = b_0 + \dots + b_q X^q$ avec $b_q \neq 0$

alors $\deg(P \circ Q) = \deg\left(\sum_{k=0}^{p} a_k Q^k\right)$

$\leq \max_{0 \leq k \leq p} (\deg(Q^k))$

$\leq \max_{0 \leq k \leq p} (\deg(Q) \times k)$

$\leq p \times \deg Q = \deg P \times \deg Q$.

Coeff de degré $\deg P \times \deg Q = pq$?

le seul terme apparaît dans

$a_p Q^p = a_p (b_0 + \dots + b_q X^q)^p$

et vaut $a_p b_q^p X^{pq}$

avec $a_p b_q^p \neq 0$ donc $\deg(P \circ Q) = \deg P \deg Q$

(et $\text{cd}(P \circ Q) = \text{cd}\, P \times \text{Cd}(Q)^{\deg P}$).

Si $P = 0_{\mathbb{K}[X]}$, $P \circ Q = 0_{\mathbb{K}[X]}$

donc $\deg P \circ Q = -\infty = \deg P \times \deg Q$. □

Exo 1 : $P(X^2) = (X^2+1)P$

composée   multiplication

Analyse : Si P est solution,

$\deg(P(X^2)) = 2 \deg P = \deg((X^2+1)P)$

non coll

$= \deg P + 2$

⚠ $\deg P \in \mathbb{N} \cup \{-\infty\}$

On a donc $\deg P \in \{2, -\infty\}$

Si $P \neq 0_{\mathbb{K}[X]}$, $\deg P = 2$

on peut écrire $P = a + bX + cX^2$ avec $c \neq 0$

$P(X^2) = a + bX^2 + cX^4$

$= (X^2+1)P = a + bX + (a+c)X^2 + bX^3 + cX^4$

Par unicité des coeff du polynôme,

$$\begin{cases} a = a \\ 0 = b \\ b = a + c \\ 0 = b \\ c = c \end{cases} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} b = 0 \\ a = -c \end{cases}$$

$$\text{donc } P = c(X^2 - 1)$$

avec $c \in \mathbb{K}^* \cup \{0\} = \mathbb{K}$.

polynôme nul

<u>Synthèse</u> : Si $P = c(X^2 - 1)$ avec $c \in \mathbb{K}$

$$P(X^2) = c(X^4 - 1)$$

$$(X^2+1)P = c(X^2+1)(X^2-1) = c(X^4-1)$$

donc P solution.

Ensemble des solutions : $\boxed{\{c(X^2-1),\ c \in \mathbb{K}\}}$.

4) <u>Dérivée formelle</u> :

<u>Prop 1</u> :

<u>Preuve</u> : (i) Si $P \neq 0$, $P = a_0 + \dots + a_n X^n$
avec $a_n \neq 0$

$$P' = a_1 + 2a_2 X + \dots + n a_n X^{n-1}$$

avec $n a_n \neq 0$ donc $\deg P' = n - 1$.

Puis récurrence.

(ii) $\left(\alpha \overbrace{\sum_{k=0}^{n} a_k X^k}^{=P} + \beta \overbrace{\sum_{k=0}^{n} b_k X^k}^{=Q}\right)'$

$$= \left(\sum_{k=0}^{n} (\alpha a_k + \beta b_k) X^k\right)'$$

$$= \sum_{k=1}^{n} k(\alpha a_k + \beta b_k) X^{k-1}$$

$$= \alpha \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1} + \beta \sum_{k=1}^{n} k b_k X^{k-1}$$

$$= \alpha P' + \beta Q'$$

(iii) $(P \times Q)' = \left(\sum_{k \geq 0} a_k X^k \sum_{\ell \geq 0} b_\ell X^\ell\right)'$

$$= \left(\sum_{\substack{k \geq 0 \\ \ell \geq 0}} a_k b_\ell X^{k+\ell}\right)'$$

linéarité

$$\overset{\text{linéarité}}{=} \sum_{\substack{k \geq 0 \\ \ell \geq 0 \\ k+\ell \neq 0}} (k+\ell) a_k b_\ell X^{k+\ell-1}$$

$$= \sum_{k+\ell \neq 0} k a_k X^{k-1} \times b_\ell X^\ell$$

$$+ \sum_{k+\ell \neq 0} a_k X^k \times \ell b_\ell X^{\ell-1}$$

$$= \sum_{k\geq 1} k a_k X^{k-1} \sum_{\ell\geq 0} b_\ell X^\ell$$

$$+ \sum_{k\geq 0} a_k X^k \sum_{\ell\geq 1} \ell b_\ell X^{\ell-1}$$

$$= P' \times Q + P \times Q'$$

Leibniz : comme pour les fonctions.

(iv) $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$

$$(P\circ Q)' = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k Q^k\right)'$$

$$= \sum_{k=0}^{n} a_k (Q^k)' \text{ par linéarité.}$$

Par récurrence : $\mathcal{P}(k)$: « $(Q^k)' = k Q' Q^{k-1}$ »

$\mathcal{P}(0)$, $\mathcal{P}(1)$ sont vraies.

Soit $k\in\mathbb{N}$ pour lequel $\mathcal{P}(k)$ vraie,

$$(Q^{k+1})' = (Q\times Q^k)' = Q'\times Q^k + Q\times (Q^k)'$$

$$\underset{HR}{=} Q'Q^k + kQ'Q^k = (k+1)Q'Q^k$$

Récurrence établie.

donc $(P\circ Q)' = \sum_{k=0}^{n} a_k (k+1) Q' Q^k$

$$= Q' \times \sum_{k=0}^{n} (k+1) a_k Q^k = Q' \times P' \circ Q$$

$\square$

Remarques 5 :

R3 -

$$\left[(X-a)^k\right]^{(n)} = \begin{cases} 0 & \text{si } n > k \\ k! & \text{si } n = k \\ k(k-1)\dots(k-n+1)(X-a)^{k-n} & \text{si } n \leq k \end{cases}$$

$$= \frac{k!}{(k-n)!} (X-a)^{k-n}$$

R4 $P = \sum_{k=0}^{d} a_k X^k$

$$P^{(n)} = \begin{cases} 0 & \text{si } n > d \\ d!\, a_d & \text{si } n = d \\ \sum_{k=n}^{d} k(k-1)\dots(k-n+1) a_k X^{k-n} & \text{si } n \leq d \end{cases}$$

II) Divisibilité et Division euclidienne

1) D.E :

Ex 1 : $A = X^4 + 2X^3 - X + 6$ | $X^3 - 6X^2 + X + 4 = B$

$$
\begin{array}{r|l}
X^4 + 2X^3 - X + 6 & X^3 - 6X^2 + X + 4 = B \\
-(X^4 - 6X^3 + X^2 + 4X) & X + 8 \\
\hline
8X^3 - X^2 - 5X + 6 & \\
-(8X^3 - 48X^2 + 8X + 32) & \\
\hline
47X^2 - 13X - 26 &
\end{array}
$$

Donc $A = B \times (X+8) + 47X^2 - 13X - 26$

Preuve du thm 1

Existence : Par récurrence forte sur $n = \deg A$.

Soit $d = \deg B$ $\quad B = b_0 + b_1 X + \dots + b_d X^d$

avec $b_d \neq 0$

Cas particuliers : Si $d = 0$,

$A = \underbrace{b_0}_{=B} \times \frac{A}{b_0} + 0$: le couple $\left(\frac{A}{b_0}, 0\right)$ convient $\deg 0 < \deg B$

Si $A = 0_{\mathbb{K}[X]}$, $A = B \times 0 + 0$: le couple $(0, 0)$ convient. $\deg 0 < \deg B$

B est fixé

$P(n)$: « pour tout polynôme A de degré n, il existe $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]$, tel que $A = BQ + R$ »

<u>Initialisation</u> : Si $n < d$,

$$A = B \times 0 + A \quad \text{avec } \deg A < \deg B$$

<u>Hérédité</u> : Soit $n \geq d$ tel que $\forall k \leq n-1$, $\mathcal{P}(k)$ vraie.

Soit A de degré n.

$$A = a_n X^n + \dots + a_0 \qquad B = b_d X^d + \dots + b_0$$

$$A = \frac{a_n}{b_d} X^{n-d} B + A_1 \quad \text{où } \deg A_1 < n$$

$$\left(A_1 = A - \frac{a_n}{b_d} X^{n-d} B \right)$$

Par HR avec $\deg A_1 \leq n-1$,

on a (Q_1, R_1) tel que $\begin{cases} A_1 = BQ_1 + R_1 \\ \deg R_1 < \deg B \end{cases}$

Donc $A = B \times \underbrace{\left(\frac{a_n}{b_d} X^{n-d} + Q_1 \right)}_{= Q} + R_1$ avec $\deg R_1 < \deg B$

et (Q, R_1) convient. Récurrence établie.

<u>Unicité</u> : Si $A = BQ_1 + R_1 = BQ_2 + R_2$ $(*)$
et $\deg R_1 < \deg B$ et $\deg R_2 < \deg B$

Alors $B(Q_1 - Q_2) = R_2 - R_1$

Donc $\underbrace{\deg B}_{\in \mathbb{N}} + \underbrace{\deg(Q_1 - Q_2)}_{\in \mathbb{N} \cup \{-\infty\}} = \deg(R_2 - R_1) \leq \max(\deg R_1, \deg R_2)$
$< \deg B$

On a donc $\deg(Q_1 - Q_2) = -\infty$ ie $Q_1 = Q_2$

Donc, dans $(*)$, $R_1 = R_2$. $\square$

2) Diviseurs, multiples

R3 - Si $A \neq 0$ et $A = BQ$ avec $Q \in \mathbb{K}[X]$

$$\deg A = \deg B + \underbrace{\deg Q}_{\in \mathbb{N}} \geq \deg B$$

car $Q \neq 0$ car $A \neq 0$

R4 - On a $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $A = BQ$

$$\mu A = \lambda B \times \left(\frac{\mu}{\lambda} Q\right) : \lambda B \mid \mu A.$$

Prop 2 : Comme dans $\mathbb{Z}$ sauf

(ii) Si A, B sont associés, $A \mid B$ et $B \mid A$

On a $Q_1, Q_2 \in \mathbb{K}[X]$ tels que

$$\begin{cases} A = BQ_1 \\ B = AQ_2 \end{cases}$$

donc $A = AQ_1Q_2$

donc $A(Q_1Q_2 - 1) = 0$

Par intégrité, $\left| \begin{array}{l} A = 0 \\ \text{ou} \\ Q_1Q_2 = 1 \end{array} \right.$

Si $A=0$, $B=AQ_2=0$ tout $\lambda,\mu\in\mathbb{K}^*$ convient

Si $Q_1Q_2=1$, alors Q_1, Q_2 sont inversibles donc constants non nuls.

Réciproque facile. $\square$

III Fonctions polynomiales, racines

1) F° polynomiales

Prop 3 : $P=\sum_{k=0}^{n} a_k X^k \quad Q=\sum_{k=0}^{n} b_k X^k$

(i) $\forall x\in\mathbb{K}$, $\widetilde{P+Q}(x)=\widetilde{\left[\sum_{k=0}^{n}(a_k+b_k)X^k\right]}(x)$

$$=\sum_{k=0}^{n}(a_k+b_k)x^k$$

$$=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k+\sum_{k=0}^{n}b_kx^k$$

$$=\widetilde{P}(x)+\widetilde{Q}(x)$$

idem pour tous les autres. $\square$

Rq 9 $f:\left|\begin{array}{l}\mathbb{K}[X]\longrightarrow\mathbb{K}^{\mathbb{K}}\\ P\longmapsto\widetilde{P}\end{array}\right.$

$\forall P,Q\in\mathbb{K}[X]$, $f(P+Q)=\widetilde{P+Q}=\widetilde{P}+\widetilde{Q}=f(P)+f(Q)$

$f(P\times Q)=\widetilde{PQ}=\widetilde{P}\widetilde{Q}=f(P)f(Q)$

$f(1_{\mathbb{K}[X]})=\widetilde{1_{\mathbb{K}[X]}}:\left|\begin{array}{l}\mathbb{K}\longrightarrow\mathbb{K}\\ x\longmapsto 1_{\mathbb{K}}\end{array}\right.$

2) Formule de Taylor

Preuve de thm 2 et cor 1

$$P = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$$

Soit $n \in \mathbb{N}$, $P^{(n)} = \sum_{k=n}^{+\infty} k(k-1)\dots(k-n+1) a_k X^{k-n}$

Symbole de Kronecker

$$0^{k-n} = \delta_{k,n} = \begin{cases} 0 & \text{si } k > n \\ 1 & \text{si } k = n \end{cases}$$

donc $\tilde{P}^{(n)}(0) = n(n-1)\dots 1\, a_n = n!\, a_n$

donc $a_n = \dfrac{\tilde{P}^{(n)}(0)}{n!}$

donc $P = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\tilde{P}^{(n)}(0)}{n!} X^n$

Pour la formule de Taylor, on pose

$Q = P \circ (X + a)$ (composée)

$Q' = 1 \times P'(X+a)$

$Q'' = 1 \times P''(X+a)$

Par récurrence $\forall n \in \mathbb{N}$, $Q^{(n)} = P^{(n)}(X+a)$
(on a sorti n facteurs 1)

On applique Mc Laurin à Q :

$$Q = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\widetilde{Q}^{(n)}(0)}{n!} X^n$$

Or $Q = P(X+a)$ donc

$$P(X+a) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\widetilde{P}^{(n)}(a)}{n!} X^n$$

Quitte à composer par $(X-a)$,

$$P(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\widetilde{P}^{(n)}(a)}{n!} (X-a)^n . \qquad \square$$