20

Polynômes et Fractions Rationnelles

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ (voire éventuellement $\mathbb{Q}$. En fait tout corps convient, mais pour certaines propriétés, on a besoin qu'il soit de caractéristique nulle [1].)

I L'algèbre des polynômes

1 Polynômes formels à une indéterminée

Se donner un polynôme à cœfficents dans $\mathbb{K}$, c'est se donner la suite $(a_0, a_1, \dots, a_d, 0, 0, \dots)$ de ses cœfficients ayant un nombre fini de termes non nuls (nulle à partir d'un certain rang).

On parle alors de suite **presque nulle** et on note

$$\mathbb{K}^{(\mathbb{N})} = \left\{(a_n)_n \; ; \; \exists d \in \mathbb{N}, \quad \forall n > d, \quad a_n = 0\right\}$$

l'ensemble des suites presque nulles.

Définition 1 : Polynôme

Étant donné une suite presque nulle $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$ d'éléments de $\mathbb{K}$, on appelle **polynôme à une indéterminée** associé à $(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathbb{K}^{(\mathbb{N})}$

$$P = a_0 + a_1 X + \dots + a_k X^k + \dots = \underbrace{\sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k}_{\text{somme finie}}.$$

On note parfois $P(X)$ pour P.

X est appelée **indéterminée**. L'ensemble des polynômes à une indéterminée à cœfficients dans $\mathbb{K}$ est noté $\mathbb{K}[X]$.

Définition 2

(i) Le **polynôme nul** est le polynôme dont tous les cœfficients sont nuls, noté $0_{\mathbb{K}[X]}$ ou plus simplement 0.

(ii) On appelle monôme tout polynôme de la forme aX^kavec $k \in \mathbb{N}$ et $a \neq 0$.

(iii) On appelle **polynôme constant** tout polynôme $P = a$ où $a \in \mathbb{K}$.

(iv) Si $P \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$, on appelle **degré de P**, noté $\deg P$, le plus grand $k \in \mathbb{N}$ tel que $a_k \neq 0$ (qui existe bien).

$$\deg P = \max\{k \in \mathbb{N} \mid a_k \neq 0\}$$

$a_{\deg P}$ est appelé **cœfficient dominant** de P, noté $\operatorname{cd} P$.

Si $\operatorname{cd} P = 1$, P est dit **unitaire** ou **normalisé**.

On pose $\deg 0 = -\infty$.

(v) On note

$$\mathbb{K}_n[X] = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid \deg P \leqslant n\}$$

l'ensemble des polynômes de degré **au plus** n.

$$\mathbb{K}_n[X] = \left\{a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n, \; (a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{K}^{n+1}\right\}$$

2 L'anneau des polynômes

Définition 3 : Lois $+$, $\times$ et $\cdot$

Soient $P = \sum_{k\geqslant 0} a_k X^k$, $Q = \sum_{k\geqslant 0} b_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.

On définit les lois $+$, $\times$ et $\cdot$ par

- $P + Q = \sum_{k\geqslant 0} (a_k + b_k) X^k$
- $\lambda P = \sum_{k\geqslant 0} (\lambda a_k) X^k$
- $P \times Q = \sum_{k\geqslant 0} a_k X^k \times \sum_{\ell\geqslant 0} b_\ell X^\ell = \sum_{\substack{m\geqslant 0 \\ (m=k+\ell)}} c_m X^m$

  en faisant une sommation par diagonales, c'est-à-dire avec

$$c_m = \sum_{k+\ell=m} a_k b_\ell = \sum_{k=0}^{m} a_k b_{m-k} = \sum_{\ell=0}^{m} a_{m-\ell} b_\ell.$$

Propriété 1 : Opérations algébriques et degré

Si $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $P + Q$, $P \times Q$ et λP sont des polynômes et

- $\deg(P + Q) \leqslant \max(\deg P, \deg Q)$
  avec égalité si et seulement si
  $\deg P \neq \deg Q$ *ou* $(\deg P = \deg Q$ *et* $\operatorname{cd} P + \operatorname{cd} Q \neq 0)$
- $\deg(\lambda P) = \deg P$ *et* $\operatorname{cd}(\lambda P) = \lambda \operatorname{cd} P$ ***si*** $\boldsymbol{\lambda \neq 0}$, *sinon* $\lambda P = 0$.
- $\deg(P \times Q) = \deg P + \deg Q$
  et $\operatorname{cd}(P \times Q) = \operatorname{cd} P \operatorname{cd} Q$.

Propriété 2 : Structure d'anneau commutatif intègre

$(\mathbb{K}[X], +, \times)$ *est*

- *un anneau commutatif*
- *intègre*
- *d'élément unité le polynôme constant* 1
- *dont le groupe des inversibles est* $\mathbb{K}_0[X] \setminus \{0\}$

1. c'est-à-dire tel que $n_{\mathbb{K}} = n \cdot 1_{\mathbb{K}} = 1_{\mathbb{K}} + \dots + 1_{\mathbb{K}} \neq 0_{\mathbb{K}}$ si $n \in \mathbb{N}^*$.

(*polynômes constants non nuls.*)

3 Composition

Définition 4 : Composée

Soit $P = \sum_{k\geqslant 0} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$ et $Q \in \mathbb{K}[X]$.
On définit le **polynôme composé**

$$P \circ Q = P(Q) = \sum_{k\geqslant 0} a_k Q^k \in \mathbb{K}[X].$$

On parle aussi de **substitution**.

Propriété 3 : Degré d'une composée

*Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, avec Q **non constant**. Alors* $\deg(P(Q)) = \deg P \deg Q$.

4 Dérivation formelle

Définition 5 : Polynôme dérivé

Si $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \in \mathbb{K}[X]$, on appelle **polynôme dérivé de** P, noté P', le polynôme défini par $0' = 0$ et si $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$,

$$P' = \sum_{k=1}^{n} k a_k X^{k-1} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) a_{k+1} X^k$$
$$= a_1 + 2a_2 X + \cdots + n a_n X^{n-1}.$$

Plus généralement, on note $P^{(0)} = P$, $P^{(1)} = P'$, $P^{(2)} = P'' = (P')'$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $P^{(k)} = \left(P^{(k-1)}\right)'$.

Propriété 4

Soient $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

(*i*)
$$\deg P' = \begin{cases} \deg P - 1 & \text{si } P \text{ non constant ;} \\ -\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Plus généralement,

$$\deg P^{(n)} = \begin{cases} \deg P - n & \text{si } \deg P \geqslant n\,; \\ -\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

En général, $\deg P^{(n)} \leqslant \deg P - n$.

(*ii*) ***Linéarité***

$$(\alpha P + \beta Q)' = \alpha P' + \beta Q'$$

(*iii*) ***Formule de Leibniz***

$$(PQ)' = P'Q + PQ'$$

et plus généralement,

$$(PQ)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} P^{(k)} Q^{(n-k)}.$$

(*iv*) $(P \circ Q)' = Q' \times P' \circ Q$.

II Divisibilité et division euclidienne

1 Division euclidienne

Théorème 1 : Division euclidienne polynomiale

Soient $A, B \in \mathbb{K}[X]$ avec $B \neq 0$. Alors il existe un unique couple $(Q, R) \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$\begin{cases} A = BQ + R \\ \deg R < \deg B \end{cases}$$

2 Diviseurs, multiples

Définition 6 : Diviseurs, multiples

Si $A, B \in \mathbb{K}[X]$, on dit que B **divise** A ou que A **est un multiple de** B, et on note $B|A$ lorsque l'on a $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que $A = BQ$.

L'ensemble des multiples de B est noté $B\mathbb{K}[X]$.

Si $A|B$ et $B|A$, A et B sont dit **associés**.

Propriété 5

Soient $A, B, C, D, P, Q \in \mathbb{K}[X]$.

(*i*) *La relation* $|$ *est transitive et réflexive sur* $\mathbb{K}[X]$.

(*ii*) *A et B sont associés si et seulement s'il existe $\lambda \in \mathbb{K}^*$ tel que $A = \lambda B$ si et seulement si* $\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(B)$.

(*iii*) $B|A \Longrightarrow B|AC$

(*iv*) $B|A \text{ et } B|C \Longrightarrow B|(PA + QC)$

(*v*) $B|A \text{ et } D|C \Longrightarrow BD|AC$

(*vi*) $B|A \Longrightarrow \forall n \in \mathbb{N},\ B^n \big| A^n$

III FONCTIONS POLYNOMIALES, RACINES

1 Fonctions polynomiales

Définition 7 : Fonction polynôme associée

Si $P = \sum_{k\geqslant 0} a_k X^k \in \mathbb{K}[X]$, on note

$$\widetilde{P} : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \widetilde{P}(x) = \sum_{k\geqslant 0} a_k x^k \end{array} \right.$$

appelée **fonction polynomiale associée à** P.

Propriété 6 : Fonction polynôme et opérations

Si $P, Q \in \mathbb{K}[X]$ et $\lambda \in \mathbb{K}$

(i) $\widetilde{P+Q} = \widetilde{P} + \widetilde{Q}$.
(ii) $\widetilde{P \times Q} = \widetilde{P} \times \widetilde{Q}$.
(iii) $\widetilde{\lambda P} = \lambda \widetilde{P}$.
(iv) $\widetilde{P \circ Q} = \widetilde{P} \circ \widetilde{Q}$.
(v) *Sur $\mathbb{R}$, $\widetilde{P}$ est dérivable et $\widetilde{P}' = \widetilde{P'}$.*

2 Formule de Taylor

Théorème 2 : Formule de Taylor

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ et $a \in \mathbb{K}$.

$$P(X) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{\widetilde{P}^{(n)}(a)}{n!}(X-a)^n$$

c'est-à-dire

$$P(X+a) = \sum_{n\geqslant 0} \frac{\widetilde{P}^{(n)}(a)}{n!} X^n$$

Corollaire 1 : Formule de Mac Laurin

$$P = \sum_{n\geqslant 0} \frac{\widetilde{P}^{(n)}(0)}{n!} X^n$$

c'est-à-dire les cœfficients de P sont les

$$a_n = \frac{\widetilde{P}^{(n)}(0)}{n!}.$$

3 Racines

a Définition

Définition 8 : Racine

$a \in \mathbb{K}$ est un **zéro** ou une **racine** de $P \in \mathbb{K}[X]$ lorsque $\widetilde{P}(a) = 0$.

b Propriétés

Propriété 7 : Racine et division

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

(i) *a est racine de P si et seulement si $(X-a) | P$.*
(ii) *$x_1, \dots, x_n$ sont racines deux à deux distinctes de P si et seulement si $(X-x_1)\cdots(X-x_n) | P$.*

Corollaire 2 : Nombre de racines

Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.

(i) *Si $P \neq 0$, P admet au plus $\deg P$ racines.*
(ii) *Si P admet strictement plus de $\deg P$ racines, $P = 0$.*
(iii) *Si P admet une infinité de racines, $P = 0$.*

Corollaire 3 : Identification polynôme et fonction polynôme

Si $\mathbb{K}$ est infini et $\widetilde{P} = \widetilde{Q}$, alors $P = Q$.
On peut alors confondre P et $\widetilde{P}$.

c Multiplicité

Définition 9 : Multiplicité

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $P \neq 0$, $a \in \mathbb{K}$.
On appelle **ordre de multiplicité** de a en tant que racine de P l'entier

$$m = \max\left\{ k \in \mathbb{N} \; ; \; (X-a)^k \middle| P \right\}$$

Ainsi, a est racine d'ordre m si et seulement si

$$(X-a)^m \,|\, P \text{ et } (X-a)^{m+1} \nmid P$$

si et seulement si on a $Q \in \mathbb{K}[X]$ tel que

$$P = (X-a)^m Q \text{ et } Q(a) \neq 0.$$

- Si $m = 0$, a **n'est pas racine** de P.

- Si $m \geqslant 1$, a est **racine** de P.
- Si $m = 1$, a est **racine simple** de P.
- Si $m = 2$, a est **racine double** de P.
- Si $m = 3$, a est **racine triple** de P.
- Si $m \geqslant 2$, a est **racine multiple** de P.

Propriété 8

$x_1, \dots, x_n$ deux à deux distincts sont racines d'ordre au moins $m_1, \dots, m_n$ respectivement si et seulement si

$$(X - x_1)^{m_1} \cdots (X - x_n)^{m_n} \,\Big|\, P.$$

Propriété 9 : Caractérisation de l'ordre

Soient $P \in \mathbb{K}[X]$, $a \in \mathbb{K}$, $m \in \mathbb{N}$.

a est racine d'ordre m de P si et seulement si $\forall k \in [\![0, m-1]\!]$, $\widetilde{P}^{(k)}(a) = 0$ et $\widetilde{P}^{(m)}(a) \neq 0$.

Corollaire 4 : Ordre et polynôme dérivé

Si a est racine d'ordre $m \geqslant 2$ de P, a racine d'ordre $m-1$ de P'.

La réciproque est fausse si on ne suppose pas a racine de P.

4 Polynômes scindés

Définition 10 : Polynôme scindé

$P \in \mathbb{K}[X]$ est dit **scindé** sur $\mathbb{K}$ s'il peut s'écrire comme produit de polynômes de degré 1 de $\mathbb{K}[X]$, c'est-à-dire si on a $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $n \in \mathbb{N}^*$ et $y_1, \dots, y_n \in \mathbb{K}$ tels que

$$P = \lambda (X - y_1) \cdots (X - y_n),$$

c'est-à-dire si on a $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $p \in \mathbb{N}^*$ et $x_1, \dots, x_p \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts et $m_1, \dots, m_p \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$P = \lambda (X - x_1)^{m_1} \cdots (X - x_p)^{m_p}.$$

Alors $\deg P \geqslant 1$, $\lambda = \operatorname{cd} P$, $x_1, \dots, x_p$ sont les racines de P deux à deux distinctes de multiplicités respectives $m_1, \dots, m_p$.

Propriété 10 : Caractérisation avec les racines

Soit P un polynôme non constant admettant exactement p racines d'ordres respectifs $m_1, \dots, m_p$ dans $\mathbb{K}$.

P est scindé si et seulement si

$$m_1 + \cdots + m_p = \deg P$$

Théorème 3 : de d'Alembert-Gauß (Théorème fondamental de l'algèbre)

Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ admet au moins une racine.

*On dit que le corps $\mathbb{C}$ est **algébriquement clos**.*

Corollaire 5 : Version scindé

Tout polynôme à cœfficients complexes non constant est scindé.

Propriété 11 : Caractérisation de la divisibilité par les racines

Si P est scindé, alors $P | Q$ si et seulement si toutes les racines de P sont racines de Q avec des multiplicités au moins égales à celles pour P.

5 Relations cœfficients-racines

Définition 11 : Fonctions symétriques élémentaires

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$.

On appelle **fonctions symétriques élémentaires** de $x_1, \dots, x_n$ les nombres

- $\sigma_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$. ($n$ termes)
- $\sigma_2 = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant n} x_{i_1} x_{i_2}$ $= x_1 x_2 + x_1 x_3 + \cdots + x_1 x_n + \cdots + x_{n-1} x_n$ ($\frac{n(n-1)}{2}$ termes)

  $\vdots$
- $\sigma_k = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leqslant n} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_k}$. ($\binom{n}{k}$ termes)

  $\vdots$
- $\sigma_n = x_1 x_2 \cdots x_n$. (1 terme)

Propriété 12 : Relations cœfficients-racines : formules de Viète

*Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $a_0, \cdots, a_n \in \mathbb{K}$ tel que $a_n \neq 0$, $P = a_0 + \cdots + a_n X^n$, $\boxed{\text{scindé}}$ sur $\mathbb{K}$, $x_1, \dots, x_n$ ses racines **comptées avec leur multiplicité**, donc $P = a_n (X - x_1) \cdots (X - x_n)$.*

En notant σ_k les fonctions symétriques élé-

mentaires en $x_1,\dots,x_n$,

- $\sigma_1 = -\dfrac{a_{n-1}}{a_n}$. *(somme)*
- $\sigma_2 = \dfrac{a_{n-2}}{a_n}$.

$\vdots$

- $\sigma_k = (-1)^k \dfrac{a_{n-k}}{a_n}$.

$\vdots$

- $\sigma_n = (-1)^n \dfrac{a_0}{a_n}$. *(produit)*

Ainsi,

$$P = a_n\big(X^n - \underbrace{\sigma_1}_{\text{somme}} X^{n-1} + \sigma_2 X^{n-2} + \dots + (-1)^n \underbrace{\sigma_n}_{\text{produit}}\big).$$

IV ARITHMÉTIQUE

1 Polynômes irréductibles

a Généralités

Définition 12 : Polynôme irréductible

On appelle **polynôme irréductible** tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ **non constant** dont les seuls diviseurs sont les λ et λP pour $\lambda \in \mathbb{K}^*$, c'est-à-dire tels que

$$P = UV \implies U \text{ ou } V \text{ inversible.}$$

Les autres polynômes sont dits **réductibles**.

Théorème 4 : Décomposition en produit d'irréductibles

Tout $A \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$ s'écrit de manière unique à l'ordre des facteurs près sous la forme

$$A = \lambda P_1^{\alpha_1} \cdots P_k^{\alpha_k}$$

où $k \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $P_1,\dots,P_k$ irréductibles deux à deux distincts unitaires, $\alpha_1,\dots,\alpha_k \in \mathbb{N}^*$.

Alors $\lambda = \operatorname{cd} A$, $P_1,\dots,P_k$ sont les diviseurs irréductibles unitaires de A.

Corollaire 6

Tout polynôme non constant admet un diviseur irréductible.

b Irréductibles de $\mathbb{C}[X]$

Propriété 13 : Irréductibles de $\mathbb{C}[X]$

Les irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ sont les polynômes de degré 1.

c Irréductibles de $\mathbb{R}[X]$

Définition 13 : Polynôme conjugué

Si $P = \sum_{k\geqslant 0} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$, on note $\overline{P} = \sum_{k\geqslant 0} \overline{a_k} X^k$.

Propriété 14 : Racine complexe de polynôme réel

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Alors si $\alpha \in \mathbb{C}$ est racine de P, $\overline{\alpha}$ l'est aussi, de même ordre.

Propriété 15 : Irréductibles de $\mathbb{R}[X]$

Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 sans racine réelle (à discriminant strictement négatif).

2 pgcd

Définition – Propriété 1 : pgcd

Soient $(A,B) \in \mathbb{K}[X]^2 \setminus \{(0,0)\}$. On appelle **plus grand diviseur commun** à A et à B tout polynôme divisant A et B de degré maximal.

On note $A \wedge B$ le seul qui soit unitaire.

On pose $0 \wedge 0 = 0$ par convention.

Propriété 16 : d'Euclide

Si $A, B, Q \in \mathbb{K}[X]$, les diviseurs communs à A et B sont les diviseurs communs à $A - BQ$ et B, et en particulier, ils ont les mêmes pgcd.

Propriété 17 : Caractérisation des pgcd

Soient $A, B, D \in \mathbb{K}[X]$ *avec* $(A, B) \neq (0, 0)$.
D *est un pgcd de* A *et* B

$$\iff \begin{cases} D|A \text{ et } D|B \\ \forall P \in \mathbb{K}[X],\ \left(P|A \text{ et } P|B \Longrightarrow P|D\right) \end{cases}$$

Les pgcd sont donc des plus grand éléments pour $|$ *(qui n'est pas un ordre sur* $\mathbb{K}[X]$*).*

Corollaire 7

(i) *Les diviseurs communs à* A *et à* B *sont exactement les diviseurs de n'importe lequel de leurs pgcd.*

(ii) *Tous les pgcd de* A *et* B *sont associés.*

(iii) *Il existe un unique pgcd unitaire, caractérisé par*

$$D = A \wedge B \iff \begin{cases} D \text{ est unitaire} \\ D|A \text{ et } D|B \\ \forall P \in \mathbb{K}[X],\ \left(P|A \text{ et } P|B \Longrightarrow P|D\right) \end{cases}$$

$A \wedge B$ *est donc le plus grand diviseur commun unitaire pour* $|$ *(qui est un ordre sur l'ensemble des polynômes unitaires.)*

Propriété 18 : PGCD et décomposition en irréductibles

Si $A = \lambda P_1^{\alpha_1} \cdots P_k^{\alpha_k}$ *et* $B = \mu P_1^{\beta_1} \cdots P_k^{\beta_k}$ *décompositions en irréductibles, alors*

$$A \wedge B = P_1^{\min(\alpha_1, \beta_1)} \dots P_k^{\min(\alpha_k, \beta_k)}.$$

3 Algorithme d'Euclide, relation de Bézout

Propriété 19 : Algorithme d'Euclide

Soient $(A, B) \in \mathbb{K}[X]^2 \setminus \{(0, 0)\}$.
On effectue les divisions euclidiennes successives

$$\begin{aligned} A &= BQ_1 + R_1 \\ B &= R_1 Q_2 + R_2 \\ R_1 &= R_2 Q_3 + R_3 \\ &\vdots \\ \forall k,\quad R_{k-1} &= R_k Q_{k+1} + R_{k+1} \\ &\text{et } \deg R_{k+1} < \deg R_k \end{aligned}$$

(en notant $A = R_{-1}$ *et* $B = R_0$*.)*
Le procédé s'arrête et le dernier reste non nul est un pgcd de A *et* B*.*

Propriété 20 : Relation de Bézout

Si $(A, B) \neq (0, 0)$*, on a* $U, V \in \mathbb{K}[X]$ *tel que*

$$AU + BV = A \wedge B.$$

Ainsi $A\mathbb{K}[X] + B\mathbb{K}[X] = (A \wedge B)\mathbb{K}[X]$.

Propriété 21 : Factorisation dans un pgcd

Si $C \neq 0$,

$$(CA) \wedge (CB) = \mathcal{N}(C)(A \wedge B) = \frac{C}{\operatorname{cd} C}(A \wedge B).$$

4 Extension à plus de deux polynômes

Exactement comme pour les entiers.

Définition 14 : pgcd de n polynômes

Soient $(A_1, \dots, A_n) \in (\mathbb{K}[X])^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}$. On note $A_1 \wedge A_2 \wedge \cdots \wedge A_n = \bigwedge_{k=1}^{n} A_k$ l'unique polynôme unitaire de degré maximal divisant $A_1, A_2, \dots, A_n$.

Propriété 22

(i) ***Associativité*** :

$$A \wedge B \wedge C = (A \wedge B) \wedge C = A \wedge (B \wedge C).$$

(ii) *Les diviseurs communs à* $A_1, \dots, A_n$ *sont exactement les diviseurs de* $\bigwedge_{k=1}^{n} A_k$.

(iii) ***Relation de Bézout*** :
On a $U_1, \dots, U_n \in \mathbb{K}[X]$ *tels que*

$$A_1 U_1 + \cdots A_n U_n = \bigwedge_{k=1}^{n} A_k.$$

5 Polynômes premiers entre eux

Définition 15 : Polynômes premiers entre eux

$A, B \in \mathbb{K}[X]$ sont dits **premiers entre eux** lorsque $A \wedge B = 1$, c'est-à-dire lorsque le diviseur unitaire commun à A et B est 1.

Théorème 5 : de Bézout

$A \wedge B = 1 \iff \exists U, V \in \mathbb{K}[X], \quad AU + BV = 1.$

Théorème 6 : Lemme de Gauß

Si $A|BC$ et $A \wedge B = 1$, alors $A|C$.

Propriété 23 : Facctorisation par le PGCD

Si $(A, B) \in \mathbb{K}[X]^2 \setminus \{(0,0)\}$, $D = A \wedge B$, alors on peut écrire

$$\begin{cases} A = DA_1 \\ B = DB_1 \\ A_1 \wedge B_1 = 1 \end{cases}$$

Propriété 24 : Cas des polynômes scindés

*Si A ou B est **scindé**,*

$A \wedge B = 1 \iff A$ et B n'ont pas de racine commune.

Propriété 25 : Primalité relative avec un produit

A est premier avec $B_1, \dots, B_n$ si et seulement si A est premier avec $B_1 \cdots B_n$.

Propriété 26

(i) *Si P est irréductible et $A \in \mathbb{K}[X]$, soit $P|A$, soit $P \wedge A = 1$.*

(ii) *Si P est irréductible et $A_1, \dots, A_n \in \mathbb{K}[X]$,*

$$P|A_1 \cdots A_n \Longrightarrow \exists i \in [\![1, n]\!], \quad P|A_i.$$

Définition 16 : Polynômes premiers entre eux dans leur ensemble

$A_1, \dots, A_n$ sont dits **premiers entre eux dans leur ensemble** lorsque $\bigwedge_{k=1}^{n} A_k = 1$, c'est-à-dire que le seul diviseur unitaire commun à tous les A_k est 1.

$A_1, \dots, A_n$ sont dits **premiers entre eux deux à deux** lorsque $\forall i \neq j, \quad A_i \wedge A_j = 1$.

Propriété 27 : 2 à 2 $\Longrightarrow$ dans leur ensemble

Premiers entre eux deux à deux $\Longrightarrow$ premiers entre eux dans leur ensemble, mais la réciproque est fausse pour plus de deux polynômes.

Théorème 7 : Théorème de Bézout

$A_1, \dots, A_n$ sont premiers entre eux dans leur ensemble si et seulement si on a $U_1, \dots, U_n$ tels que $A_1U_1 + \cdots + A_nU_n = 1$.

Propriété 28 : Diviseurs premiers entre eux 2 à 2

*Si $A_1, \dots, A_n$ sont premiers entre eux **deux à deux** et divisent B, alors $A_1 \cdots A_n | B$.*

6 Multiples communs

Définition – Propriété 2 : ppcm

Soient $A, B \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$. On appelle **plus petit commun multiple de A et B** tout multiple commun à A et à B non nul de degré minimal.

On pose, de plus, $A \vee 0 = 0 \vee B = 0 \vee 0 = 0$.

Propriété 29 : Caractérisation

M est un ppcm de A et B non nuls

$$\iff \begin{cases} M \neq 0 \\ A|M \text{ et } B|M \\ \forall P \in \mathbb{K}[X], \ (A|P \text{ et } B|P \Longrightarrow M|P) \end{cases}$$

Corollaire 8

(i) *Les multiples communs à A et à B sont exactement les multiples de tout ppcm de A et B.*

$$A\mathbb{K}[X] \cap B\mathbb{K}[X] = M\mathbb{K}[X].$$

(ii) *Il existe un unique ppcm **unitaire**, noté $A \vee B$.*

$$M = A \vee B \iff \begin{cases} M \text{ est unitaire} \\ A|M \text{ et } B|M \\ \forall P \in \mathbb{K}[X],\ (A|P \text{ et } B|P \implies M|P) \end{cases}$$

Propriété 30 : Factorisation de ppcm

Si $A, B, C \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$,

$$(CA) \vee (CB) = \mathcal{N}(C)(A \vee B) = \frac{C}{\operatorname{cd} C}(A \vee B).$$

Propriété 31 : PGCD × PPCM

Si $A, B \in \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$,

- *Si $A \wedge B = 1$,*

$$A \vee B = \mathcal{N}(AB) = \frac{AB}{\operatorname{cd}(AB)}.$$

- *En général,*

$$(A \wedge B)(A \vee B) = \mathcal{N}(AB) = \frac{AB}{\operatorname{cd}(AB)}.$$

Propriété 32 : PPCM et décomposition en irréductibles

Si $A = \lambda P_1^{\alpha_1} \cdots P_k^{\alpha_k}$ et $B = \mu P_1^{\beta_1} \cdots P_k^{\beta_k}$ décompositions en irréductibles, alors

$$A \vee B = P_1^{\max(\alpha_1, \beta_1)} \cdots P_k^{\max(\alpha_k, \beta_k)}.$$

V Interpolation de Lagrange

- **Problématique** : Étant donné $n \in \mathbb{N}$, $n+1$ scalaires $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts, et $y_0, \dots, y_n \in \mathbb{K}$ fixés (par exemple pour tout i, $y_i = f(x_i)$ où f est une fonction connue ou non).

  On cherche des polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ tels que $\forall i \in [\![0, n]\!],\ \widetilde{P}(x_i) = y_i$.

  C'est un problème d'**interpolation**.

Définition 17 : Polynômes de Lagrange

Si $n \in \mathbb{N}^*$ et $x_0, \dots, x_n$ deux à deux distincts, on appelle k^{e} polynôme de Lagrange associé à $(x_0, \dots, x_n)$ le polynôme

$$L_k = \frac{\prod_{j \neq k} (X - x_j)}{\prod_{j \neq k} (x_k - x_j)}.$$

Propriété 33 : Polynôme d'interpolation de Lagrange

Étant donné $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts et $y_0, \dots, y_n \in \mathbb{K}$, il existe un unique polynôme P de degré au plus n tel que $\forall i \in [\![0, n]\!],\ \widetilde{P}(x_i) = y_i$. Il s'agit de

$$P = \sum_{k=0}^{n} y_k Lk.$$

Propriété 34 : Tous les polynômes d'interpolation

Les polynômes d'interpolation associés aux points $((x_0, y_0), \dots, (x_n, y_n))$ sont les polynômes

$$P + \left(\prod_{k=0}^{n} (X - x_k) \right) Q$$

où $Q \in \mathbb{K}[X]$ et $P = \sum_{k=0}^{n} y_k L_k$.

VI Fractions rationnelles

1 Définition

Définition 18 : Fraction rationnelle

On parle de **fraction rationnelle** et on note $\mathbb{K}(X)$ l'ensemble quotient :

$$\mathbb{K}(X) = \left\{ \frac{A}{B}\ ;\ (A, B) \in \mathbb{K}[X] \times (\mathbb{K}[X] \setminus \{0\}) \right\}.$$

Si $F \in \mathbb{K}(X)$ et $(A, B) \in \mathbb{K}[X] \times (\mathbb{K}[X] \setminus \{0\})$ tel que $F = \dfrac{A}{B}$, on dit que (A, B) est un **représentant** de la fraction rationnelle F.

Définition 19 : Opérations sur $\mathbb{K}(X)$

Si $F, G \in \mathbb{K}(X)$, $A, B, C, D \in \mathbb{K}[X]$ tels que $F = \dfrac{A}{B}$ et $G = \dfrac{C}{D}$, $\lambda \in \mathbb{K}$, on pose

- $F + G = \dfrac{A}{B} + \dfrac{C}{D} \overset{\text{def}}{=} \dfrac{AD + BC}{BD}$
- $F \times G = \dfrac{A}{B} \times \dfrac{C}{D} \overset{\text{def}}{=} \dfrac{AC}{BD}$
- $\lambda F = \lambda \dfrac{A}{B} \overset{\text{def}}{=} \dfrac{\lambda A}{B}$

Propriété 35 : Le corps $\mathbb{K}(X)$

$(\mathbb{K}(X), +, \times)$ est un corps commutatif appelé corps des fractions rationnelles.

2 Plongement de $\mathbb{K}[X]$ dans $\mathbb{K}(X)$

L'application $\psi : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}(X) \\ P & \longmapsto & \dfrac{P}{1} \end{array} \right.$ est un morphisme d'anneaux injectif (et même mieux, compatibilité avec $\cdot$, la dérivée, la composée, etc).

On peut donc confondre polynôme P et fraction rationnelle $\dfrac{P}{1}$.

3 Dérivée d'une fraction rationnelle

Définition 20 : Fraction rationnelle dérivée

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$, $(A, B) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$ tel que $F = \dfrac{A}{B}$. On appelle **fraction rationnelle dérivée** de F la fraction rationnelle $F' = \dfrac{A'B - AB'}{B^2}$.

4 Degré d'une fraction rationnelle

Définition 21 : Degré

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$, $(A, B) \in \mathbb{K}[X] \times \mathbb{K}[X] \setminus \{0\}$ tel que $F = \dfrac{A}{B}$. On définit le **degré** de F par

$$\deg F = \deg A - \deg B \in \mathbb{Z} \cup \{-\infty\}.$$

Propriété 36

Soient $F, G \in \mathbb{K}(X)$ et $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$.

(i) $\deg(\alpha F + \beta G) \leqslant \max(\deg F, \deg G)$.

(ii) $\deg(F \times G) = \deg F + \deg G$.

(iii) Si $\lambda \in \mathbb{K}^*$, $\deg(\lambda F) = \deg F$.

(iv) $\deg F' \leqslant \deg F - 1$.

5 Forme irréductible

Propriété 37

Toute fraction rationnelle $F \in \mathbb{K}(X)$ s'écrit de manière unique sous la forme $F = \dfrac{A}{B}$ avec $A, B \in \mathbb{K}[X]$ premiers entre eux et B unitaire.

*On parle de **forme irréductible de** F.*

6 Racines et pôles

Définition 22 : Racines et pôles

Soit $F \in \mathbb{K}(X)$, $F = \dfrac{A}{B}$ sous forme irréductible.

On appelle **racine d'ordre** m de F toute racine de A d'ordre m.

On appelle **pôle d'ordre** m de F toute racine de B d'ordre m.

7 Fonctions rationnelles

Définition 23 : Fonction rationnelle associée

Soit $F = \dfrac{A}{B} \in \mathbb{K}(X)$ sous forme irréductible.

On définit la **fonction rationnelle associée à** F par

$$\widetilde{F} : \left| \begin{array}{ccc} D_F & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\widetilde{A}(x)}{\widetilde{B}(x)} \end{array} \right.$$

définie sur $D_F = \mathbb{K} \setminus \{$pôles de $F\}$.

Propriété 38

Si $F, G \in \mathbb{K}(X)$ et $\widetilde{F}(x) = \widetilde{G}(x)$ pour une infinité de $x \in \mathbb{K}$, alors $F = G$.

8 Décomposition en éléments simples

a Partie entière

Définition – Propriété 3

Soit $F\in\mathbb{K}(X)$. On note

$$\mathbb{K}^-(X)=\{F\in\mathbb{K}(X)\mid \deg F<0\}.$$

Il existe un unique couple $(Q,G)\in\mathbb{K}[X]\times\mathbb{K}^-(X)$ tel que

$$F=Q+G.$$

Q est appelé **partie entière** de F.

b Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$

Théorème 8 : Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$

Soit $F\in\mathbb{C}(X)$, $F=\frac{A}{B}$ sous forme irréductible, $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ pôles de F d'ordre $m_1,\dots,m_n$:

$$F=\frac{A}{\prod_{k=1}^{n}(X-\alpha_k)^{m_k}}$$

et $Q\in\mathbb{C}[X]$ la partie entière de F.

Alors il existe une unique famille $(\lambda_{k,j})_{\substack{1\leqslant k\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant m_k}}$ de nombres complexes telle que

$$F=\underbrace{Q}_{\text{partie entière}}+\underbrace{\frac{\lambda_{1,1}}{X-\alpha_1}+\dots+\frac{\lambda_{1,m_1}}{(X-\alpha_1)^{m_1}}}_{\text{partie polaire associée à }\alpha_1}+\dots+\underbrace{\frac{\lambda_{n,1}}{X-\alpha_n}+\dots+\frac{\lambda_{n,m_n}}{(X-\alpha_n)^{m_n}}}_{\text{partie polaire associée à }\alpha_n}$$

Propriété 39 : Partie polaire relative à un pôle simple

Si α pôle simple de $F=\frac{A}{B}=\frac{A}{(X-\alpha)B_1}$ sous forme irréductible avec $B_1(\alpha)\neq 0$, $\frac{\lambda}{X-\alpha}$ avec $\lambda\in\mathbb{C}$ la partie polaire associée à α. Alors

$$\lambda=[\widetilde{(X-\alpha)F}](\alpha)=\frac{A(\alpha)}{B_1(\alpha)}=\frac{A(\alpha)}{B'(\alpha)}.$$

Propriété 40 : Pôle d'ordre $\geqslant 2$

Si α pôle d'ordre $m\geqslant 2$ de $F=\frac{A}{B}$ sous forme irréductible,

$$F=\frac{A}{B}=\frac{A}{(X-\alpha)^mB_1}=\frac{\lambda_1}{X-\alpha}+\dots+\frac{\lambda_m}{(X-\alpha)^m}+G$$

où $B_1(\alpha)\neq 0$ et α n'est pas pôle de G.

Alors $\lambda_m=[\widetilde{(X-\alpha)^mF}](\alpha)=\frac{A(\alpha)}{B_1(\alpha)}$ et $F-\frac{\lambda_m}{(X-\alpha)^m}$ admet α comme pôle d'ordre au plus $m-1$ ce qui permet de réitérer le processus.

Méthode

Les deux propriétés précédentes permettent de trouver les cœfficients de la décomposition.

Lorsqu'il reste peu de cœfficients à calculer, on peut aussi essayer d'évaluer la fraction rationnelle en des points bien choisis ou utiliser des méthodes d'analyse réelle (limite en ∞ de $x^mF(x)$...)

Penser à exploiter la parité avec l'unicité des cœfficients !

c Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$

Théorème 9 : Décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$

Soit $F\in\mathbb{R}(X)$, $F=\frac{A}{B}$ sous forme irréductible, avec la décomposition de B en facteur irréductibles dans $\mathbb{R}$: $F=\frac{A}{\prod_{k=1}^{p}(X-x_k)^{m_k}\prod_{i=1}^{r}(X^2+p_iX+q_i)^{n_i}}$ et $Q\in\mathbb{R}[X]$ la partie entière de F.

Alors il existe d'uniques familles $(\lambda_{k,j})_{\substack{1\leqslant k\leqslant p\\1\leqslant j\leqslant m_k}}$, $(\mu_{i,\ell})_{\substack{1\leqslant i\leqslant r\\1\leqslant \ell\leqslant n_i}}$ et $(\nu_{i,\ell})_{\substack{1\leqslant i\leqslant r\\1\leqslant \ell\leqslant n_i}}$ de nombres réels tq

$$F=\underbrace{Q}_{\text{partie entière}}+\sum_{k=1}^{p}\underbrace{\left(\sum_{j=1}^{m_k}\overbrace{\frac{\lambda_{k,j}}{(X-x_k)^j}}^{\substack{\text{élément simple}\\\text{de 1}^\text{e}\text{ espèce}}}\right)}_{\text{partie polaire associée à }x_k}+\sum_{i=1}^{r}\underbrace{\left(\sum_{\ell=1}^{n_i}\overbrace{\frac{\mu_{i,\ell}X+\nu_{i,\ell}}{(X^2+p_iX+q_i)^\ell}}^{\substack{\text{élément simple}\\\text{de 2}^\text{e}\text{ espèce}}}\right)}_{\text{partie polaire associée à }X^2+p_iX+q_i}.$$

Méthode

Les méthodes vues dans $\mathbb{C}$ s'appliquent pour les pôles réels. Pour les μ et ν, on peut appliquer la méthode « du cache » en α racine complexe de X^2+pX+q.

On peut aussi décomposer dans $\mathbb{C}$ et rassembler les pôles complexes non réels et leur conjugué. L'écriture $F=\overline{F}$ et l'unicité des cœfficients donne des relations entre ceux-ci (comme avec la parité).

d Décomposition en éléments simples de P'/P

Propriété 41 : Décomposition en éléments simples de P'/P

*Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ **scindé**, $P=\lambda\prod_{k=1}^{p}(X-x_k)^{m_k}$. Alors la décomposition en éléments simples de $\frac{P'}{P}$ est donnée par*

$$\frac{P'}{P}=\sum_{k=1}^{p}\frac{m_k}{X-x_k}.$$

*Variante : si $P=\lambda\prod_{k=1}^{n}(X-y_k)$ où les y_k sont les racines **comptées avec multiplicité**, alors*

$$\frac{P'}{P}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{X-y_k}.$$