Programme de colle – MP2I

Dénombrement

Extrait du programme officiel :

Cette section est introduite essentiellement en vue de son utilisation en probabilités; rattaché aux mathématiques discrètes, le dénombrement interagit également avec l'algèbre et l'informatique.

Toute formalisation excessive est exclue. En particulier :

- *parmi les propriétés du paragraphe a), les plus intuitives sont admises sans démonstration;*
- *l'utilisation de bijections dans les problèmes de dénombrement n'est pas un attendu du programme.*

Contenus	Capacités & commentaires
a) Cardinal d'un ensemble fini	
Cardinal d'un ensemble fini.	Notations $\|A\|$, $\mathrm{card}(A)$. Tout fondement théorique des notions d'entier naturel et de cardinal est hors programme.
Cardinal d'une partie d'un ensemble fini, cas d'égalité. Une application entre deux ensembles finis de même cardinal est bijective si et seulement si elle est injective, si et seulement si elle est surjective.	
Opérations sur les cardinaux : union disjointe ou quelconque, complémentaire, différence, produit cartésien. Cardinal de l'ensemble des applications d'un ensemble fini dans un autre. Cardinal de l'ensemble des parties d'un ensemble fini.	La formule du crible est hors programme.
b) Listes et combinaisons	
Nombre de p-listes (ou p-uplets) d'éléments distincts d'un ensemble de cardinal n, nombre de permutations d'un ensemble de cardinal n.	Nombre d'applications injectives d'un ensemble de cardinal p dans un ensemble de cardinal n.
Nombre de parties à p éléments (ou p-combinaisons) d'un ensemble de cardinal n.	Démonstration combinatoire des formules de Pascal et du binôme.

Arithmétique (sans congruence)

Extrait du programme officiel :

L'objectif de cette section est d'étudier les propriétés de la divisibilité des entiers et des congruences. L'approche préconisée reste élémentaire en ce qu'elle ne fait pas appel au langage des structures algébriques.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Divisibilité et division euclidienne	
Divisibilité dans $\mathbb{Z}$, diviseurs, multiples. Théorème de la division euclidienne.	Caractérisation des couples d'entiers associés.
b) PGCD et algorithme d'Euclide	
PGCD de deux entiers naturels dont l'un au moins est non nul.	Notation $a \wedge b$. Le PGCD de a et b est défini comme étant le plus grand élément (pour l'ordre naturel dans $\mathbb{N}$) de l'ensemble des diviseurs communs à a et b.
Algorithme d'Euclide.	L'ensemble des diviseurs communs à a et b est égal à l'ensemble des diviseurs de $a \wedge b$. $a \wedge b$ est le plus grand élément (au sens de la divisibilité) de l'ensemble des diviseurs communs à a et b. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, PGCD de ka et kb.
Extension au cas de deux entiers relatifs.	
Relation de Bézout.	Détermination d'un couple de Bézout par l'algorithme d'Euclide étendu.

Contenus	Capacités & Commentaires
PPCM.	Notation $a \vee b$.
c) Entiers premiers entre eux	
Couple d'entiers premiers entre eux.	
Théorème de Bézout.	Forme irréductible d'un rationnel.
Lemme de Gauss.	
Si a et b sont premiers entre eux et divisent n, alors ab divise n.	
Si a et b sont premiers à n, alors ab est premier à n.	
PGCD d'un nombre fini d'entiers, relation de Bézout. Entiers premiers entre eux dans leur ensemble, premiers entre eux deux à deux.	
d) Nombres premiers	
Nombre premier.	Crible d'Ératosthène.
L'ensemble des nombres premiers est infini.	
Existence et unicité de la décomposition d'un entier naturel non nul en produit de nombres premiers.	
Pour p premier, valuation p-adique.	Notation $v_p(n)$.
Valuation p-adique d'un produit.	Caractérisation de la divisibilité en termes de valuations p-adiques. Expressions du PGCD et du PPCM à l'aide des valuations p-adiques.

Semaine prochaine : Congruences. Développements limités.

Questions de cours

Les questions de cours précédé d'une ★ ne sont pas exigibles cette semaine des groupes ayant colle d'informatique.

(i) Cardinal de $E \times F$, F^E, $\mathscr{P}(E)$, preuves avec des bijections. Écriture de $\binom{n}{k}$ avec des factorielles (lemme des bergers).

(ii) Démonstration **par le dénombrement** des quatre formules sur les cœfficients binomiaux : formule du triangle de Pascal, symétrie sur une ligne de celui-ci, formule de factorisation et formule du binôme.

(iii) ★ Théorème de la division euclidienne, preuve par récurrence.

(iv) Algorithme d'Euclide et relation de Bézout. Écritures récursives des algorithmes d'Euclide et d'Euclide étendu.

(v) Théorème de Bézout, Lemme de Gauß, pgcd × ppcm.

(vi) ★ L'ensemble des nombres premiers est infini. Crible d'Ératosthène en Python.

(vii) ★ Décomposition primaire.

(viii) **CCINP 112** : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et E un ensemble possédant n éléments. On désigne par $\mathscr{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

  (a) Déterminer le nombre a de couples $(A, B) \in (\mathscr{P}(E))^2$ tels que $A \subset B$.

  (b) Déterminer le nombre b de couples $(A, B) \in (\mathscr{P}(E))^2$ tels que $A \cap B = \varnothing$.

  (c) Déterminer le nombre c de triplets $(A, B, C) \in (\mathscr{P}(E))^3$ tels que A, B et C soient deux à deux disjoints et vérifient $A \cup B \cup C = E$.