Programme de colle – MP2I

Arithmétique (reprise et fin)

Extrait du programme officiel :

L'objectif de cette section est d'étudier les propriétés de la divisibilité des entiers et des congruences. L'approche préconisée reste élémentaire en ce qu'elle ne fait pas appel au langage des structures algébriques.

Contenus	Capacités & commentaires
a) Divisibilité et division euclidienne	
Divisibilité dans $\mathbb{Z}$, diviseurs, multiples. Théorème de la division euclidienne.	Caractérisation des couples d'entiers associés.
b) PGCD et algorithme d'Euclide	
PGCD de deux entiers naturels dont l'un au moins est non nul.	Notation $a \wedge b$. Le PGCD de a et b est défini comme étant le plus grand élément (pour l'ordre naturel dans $\mathbb{N}$) de l'ensemble des diviseurs communs à a et b.
Algorithme d'Euclide.	L'ensemble des diviseurs communs à a et b est égal à l'ensemble des diviseurs de $a \wedge b$. $a \wedge b$ est le plus grand élément (au sens de la divisibilité) de l'ensemble des diviseurs communs à a et b. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, PGCD de ka et kb.
Extension au cas de deux entiers relatifs.	
Relation de Bézout.	Détermination d'un couple de Bézout par l'algorithme d'Euclide étendu.
PPCM.	Notation $a \vee b$.
c) Entiers premiers entre eux	
Couple d'entiers premiers entre eux.	
Théorème de Bézout.	Forme irréductible d'un rationnel.
Lemme de Gauss. Si a et b sont premiers entre eux et divisent n, alors ab divise n. Si a et b sont premiers à n, alors ab est premier à n. PGCD d'un nombre fini d'entiers, relation de Bézout. Entiers premiers entre eux dans leur ensemble, premiers entre eux deux à deux.	
d) Nombres premiers	
Nombre premier.	Crible d'Ératosthène.
L'ensemble des nombres premiers est infini. Existence et unicité de la décomposition d'un entier naturel non nul en produit de nombres premiers.	
Pour p premier, valuation p-adique.	Notation $v_p(n)$.
Valuation p-adique d'un produit.	Caractérisation de la divisibilité en termes de valuations p-adiques. Expressions du PGCD et du PPCM à l'aide des valuations p-adiques.
e) Congruences	
Relation de congruence modulo un entier sur $\mathbb{Z}$.	Notation $a \equiv b\ [n]$.
Opérations sur les congruences : somme, produit.	Les anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont hors programme.
Utilisation d'un inverse modulo n pour résoudre une congruence modulo n. Petit théorème de Fermat.	

Développements limités

Extrait du programme officiel :

Contenus	Capacités & commentaires
Développements limités	
Développement limité à l'ordre n d'une fonction en un point. Unicité des coefficients, troncature.	Le développement limité à l'ordre n de f en a peut se ramener à celui de $h \mapsto f(a+h)$ en 0. Signe de f au voisinage de a.
Développement limité en 0 d'une fonction paire, impaire. Caractérisation de la dérivabilité par l'existence d'un développement limité à l'ordre 1.	
Opérations sur les développements limités : combinaison linéaire, produit, quotient.	On privilégie la factorisation par le terme prépondérant pour prévoir l'ordre d'un développement. Les étudiants doivent savoir déterminer sur des exemples simples le développement limité d'une composée, mais aucun résultat général n'est exigible.
Primitivation d'un développement limité. Formule de Taylor-Young : pour f de classe $\mathscr{C}^n$, développement limité à l'ordre n en 0 de $h \mapsto f(a+h)$. Développement limité à tout ordre en 0 de exp, sin, cos, sh, ch, $x \mapsto \ln(1+x)$, $x \mapsto \dfrac{1}{1-x}$, $x \mapsto (1+x)^\alpha$, Arctan. Développement limité à l'ordre 3 en 0 de tan.	
~~Application des développements limités à l'étude locale d'une fonction.~~	~~Calculs d'équivalents et de limites, position relative d'une courbe et de sa tangente, détermination d'asymptotes.~~
~~Condition nécessaire, condition suffisante à l'ordre 2 pour un extremum local en un point intérieur.~~	

On se contente cette semaine de petits développements limités de fonctions.

Semaine prochaine : Développements asymptotiques et applications. Polynômes.

Questions de cours

Les questions de cours précédé d'une ★ ne sont pas exigibles cette semaine des groupes ayant colle d'informatique.

(i) L'ensemble des nombres premiers est infini. Crible d'Ératosthène en Python.

(ii) Décomposition primaire.

(iii) DL (justifiés) de $\exp$, $\cos$, $\sin$, ch, sh, $(1+x)^\alpha$, $\dfrac{1}{1\pm x}$, $\ln(1\pm x)$, Arctan.

(iv) ★ Énoncé et démonstration de la formule de Taylor-Young.

(v) ★ DL à l'ordre 7 de $\tan$.

(vi) ★ **CCINP 1**

(a) On considère deux suites numériques $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non nulle à partir d'un certain rang et $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$.

Démontrer que u_n et v_n sont de même signe à partir d'un certain rang.

(b) Déterminer le signe, au voisinage de l'infini, de $u_n = \mathrm{sh}\left(\dfrac{1}{n}\right) - \tan\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

(vii) **CCINP 86**

(a) Soit $(a,b,c) \in \mathbb{Z}^3$. Prouver que si $c \wedge a = 1$ et $c \wedge b = 1$ alors $c \wedge (ab) = 1$.

(b) Soit p un nombre premier.

i. Prouver que pour tout $k \in [\![1, p-1]\!]$, p divise $\dbinom{p}{k}k!$ et en déduire que p divise $\dbinom{p}{k}$.

ii. Prouver que $\forall n \in \mathbb{N},\quad n^p \equiv n \bmod p$. **Indication** : *procéder par récurrence.*

iii. En déduire , pour tout entier naturel n, que p ne divise pas $n \Longrightarrow n^{p-1} \equiv 1 \bmod p$.

(viii) **CCINP 94**

(a) Énoncer le théorème de Bézout dans $\mathbb{Z}$.

(b) Soit a et b deux entiers naturels premiers entre eux. Soit $c \in \mathbb{N}$. Prouver que $(a|c$ et $b|c) \Longleftrightarrow ab|c$.

(c) On considère le système $(S) : \left\{ \begin{array}{lll} x & \equiv & 6 \quad [17] \\ x & \equiv & 4 \quad [15] \end{array} \right.$ dans lequel l'inconnue x appartient à $\mathbb{Z}$.

i. Déterminer une solution particulière x_0 de (S) dans $\mathbb{Z}$.

ii. *Déduire des questions précédentes* la résolution dans $\mathbb{Z}$ du système (S).