Programme de colle – MP2I

Polynômes et Fractions rationnelles

Extrait du programme officiel :

Contenus	Capacités & commentaires
a) Anneau des polynômes à une indéterminée	
Anneau $\mathbb{K}[X]$. Degré, coefficient dominant, polynôme unitaire. Degré d'une somme, d'un produit. Composition.	La construction de $\mathbb{K}[X]$ est hors programme. Ensemble $\mathbb{K}_n[X]$ des polynômes de degré au plus n. L'anneau $\mathbb{K}[X]$ est intègre.
b) Divisibilité et division euclidienne	
Divisibilité dans $\mathbb{K}[X]$, diviseurs, multiples. Caractérisation des couples de polynômes associés.	
Théorème de la division euclidienne.	Algorithme de la division euclidienne.
c) Fonctions polynomiales et racines	
Fonction polynomiale associée à un polynôme. Racine (ou zéro) d'un polynôme, caractérisation en termes de divisibilité.	Lien avec l'introduction aux équations algébriques de la section « Nombres complexes ». Méthode de Horner pour l'évaluation polynomiale.
Le nombre de racines d'un polynôme non nul est majoré par son degré.	Détermination d'un polynôme par la fonction polynomiale associée.
Multiplicité d'une racine.	
Polynôme scindé. Relations entre coefficients et racines (formules de Viète).	Les formules concernant la somme et le produit doivent être connues des étudiants ; les autres doivent être retrouvées rapidement.
d) Dérivation	
Dérivée formelle d'un polynôme.	Pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, lien avec la dérivée de la fonction polynomiale associée.
Opérations sur les polynômes dérivés : combinaison linéaire, produit. Formule de Leibniz. Formule de Taylor polynomiale. Caractérisation de la multiplicité d'une racine par les polynômes dérivés successifs.	
e) Arithmétique dans $\mathbb{K}[X]$	
PGCD de deux polynômes dont l'un au moins est non nul.	Tout diviseur commun à A et B de degré maximal est appelé un PGCD de A et B.
Algorithme d'Euclide.	L'ensemble des diviseurs communs à A et B est égal à l'ensemble des diviseurs d'un de leurs PGCD. Tous les PGCD de A et B sont associés. Un seul est unitaire, on le note $A \wedge B$.
Relation de Bézout.	Détermination d'un couple de Bézout par l'algorithme d'Euclide étendu.
PPCM.	Notation $A \vee B$.
Couple de polynômes premiers entre eux. Théorème de Bézout. Lemme de Gauss. PGCD d'un nombre fini de polynômes, relation de Bézout. Polynômes premiers entre eux dans leur ensemble, premiers entre eux deux à deux.	Adaptation des résultats présentés lors de l'étude de l'arithmétique dans $\mathbb{Z}$.
f) Polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$ et $\mathbb{R}[X]$	
Théorème de d'Alembert-Gauss.	La démonstration est hors programme.
Polynômes irréductibles de $\mathbb{C}[X]$. Théorème de décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{C}[X]$.	Caractérisation de la divisibilité dans $\mathbb{C}[X]$ à l'aide des racines et des multiplicités. Deux polynômes de $\mathbb{C}[X]$ sont premiers entre eux si et seulement s'ils n'ont pas de racine commune. Factorisation de $X^n - 1$ dans $\mathbb{C}[X]$.
Polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$. Théorème de décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.	Deux racines complexes conjuguées d'un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ ont même multiplicité.

Semaine prochaine : Interpolation de Lagrange. Fractions rationnelles. Espaces vectoriels.

Questions de cours

Les questions de cours précédées d'une ★ ne sont pas exigibles cette semaine du groupe 1 ayant colle d'informatique.

(i) Caractérisation séquentielle de la limite des suites.

(ii) ★ Formulaire de développements limités (avec preuves sur demande du colleur).

(iii) Cœfficients et degré d'une somme, d'un produit de polynômes.

(iv) Dérivées d'une combinaison linéaire, d'un produit, d'une composée de polynômes.

(v) ★ Théorème de la division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$.

(vi) Formule de Taylor, caractérisation des racines par divisibilité.

(vii) Caractérisation de la multiplicité avec les dérivées.

(viii) ★ Relations cœfficients racines (formules de Viète).

(ix) ★ Irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$.

(x) **CCINP 85**

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $a \in \mathbb{R}$.
   (a) Donner sans démonstration, en utilisant la formule de Taylor, la décomposition de $P(X)$ dans la base $\left(1, X-a, (X-a)^2, \cdots, (X-a)^n\right)$.
   (b) Soit $r \in \mathbb{N}^*$. En déduire que :
   a est une racine de P d'ordre de multiplicité r si et seulement si $P^{(r)}(a) \neq 0$ et
   $$\forall k \in [\![0, r-1]\!],\ P^{(k)}(a) = 0.$$
2. Déterminer deux réels a et b pour que 1 soit racine double du polynôme $P = X^5 + aX^2 + bX$ et factoriser alors ce polynôme dans $\mathbb{R}[X]$.