DTL 4

Exercice 1 :

1.a) $\forall n$, $u_{n+1} - u_n = S_{2n+2} - S_{2n} = \frac{(-1)^{2n+2}}{(2n+2)!} + \frac{(-1)^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{1-(2n+2)}{(2n+2)!} < 0$

Donc (u_n) est strictement décroissante.

$\forall n$, $v_{n+1} - v_n = S_{2n+3} - S_{2n+1} = \frac{(-1)^{2n+3}}{(2n+3)!} + \frac{(-1)^{2n+2}}{(2n+2)!} = \frac{-1+(2n+3)}{(2n+3)!} > 0$

Donc (v_n) est strictement croissante.

$\forall n$, $v_n - u_n = \frac{(-1)^{2n+1}}{(2n+1)!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

Donc $\boxed{(u_n) \text{ et } (v_n) \text{ sont adjacentes.}}$

1.b) Donc (S_{2n}) et (S_{2n+1}) converge vers une même limite $\ell \in \mathbb{R}$

Donc $\boxed{S_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell.}$

De plus, $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n < \ell < u_n$ ie $S_{2n+1} < \ell < S_{2n}$ (stricte monotonie)

En particulier, $S_3 < \ell < S_2$ avec $\begin{cases} S_2 = 1 - 1 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \\ S_3 = 1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \end{cases}$

Donc $\boxed{\ell \in \left]\frac{1}{3}; \frac{1}{2}\right[.}$

1.c) • Si n pair, n s'écrit $2k$ et $S_{2k+1} \leq \ell \leq S_{2k}$

donc $0 \leq S_{2k} - \ell \leq S_{2k} - S_{2k+1} = \frac{1}{(2k+1)!}$

donc $|S_n - \ell| \leq \frac{1}{(n+1)!}$.

• Si n impair, n s'écrit $2k+1$ et $S_{2k+1} \leq \ell \leq S_{2k+2}$

donc $0 \geqslant S_{2k+1} - \ell \geqslant S_{2k+1} - S_{2k+2} = \frac{-1}{(2k+2)!}$

donc $|S_n - \ell| \leq \frac{1}{(n+1)!}$.

Dans tous les cas, $\boxed{|S_n - \ell| \leq \frac{1}{(n+1)!}.}$

1.d) $3! = 6$; $4! = 24$; $5! = 120$; $6! = 720$; $7! = 5040$.

Donc si $n \geqslant 6$, $\frac{1}{(n+1)!} \leq \frac{1}{7!} \leq \frac{1}{1000} = 10^{-3}$.

À partir de $n = 6$, S_n est une valeur approchée de ℓ à 10^{-3} près.

2a) Si $n \geq q$, $n!S_n - n!\ell = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \underbrace{\frac{n!}{k!}}_{\in \mathbb{N} \text{ car } k \leq n} - p \times \underbrace{\frac{n!}{q}}_{\in \mathbb{N} \text{ car } n \geq q}$

donc $\boxed{n!S_n - n!\ell \in \mathbb{Z}}$

2b) Or $\forall n \in \mathbb{N}$, $|S_n - \ell| \leq \frac{1}{(n+1)!}$.

Donc, si $n \geq q$, $\underbrace{|n!(S_n - \ell)|}_{\in \mathbb{Z}} \leq \frac{1}{n+1} < 1$

donc $\forall n \geq q$, $n!(S_n - \ell) = 0$

donc $\boxed{\forall n \geq q,\ S_n = \ell.}$

Ceci contredit la stricte monotonie de (S_{2n}) et de (S_{2n+1}) donc

$\boxed{\ell \notin \mathbb{Q}.}$

3a - Si $x \geq 0$, $\forall t \in [0, x]$, $0 \leq e^{-t} \leq 1$

donc $\int_0^x 0\,dt \leq \int_0^x e^{-t}dt \leq \int_0^x dt$ donc $0 \leq 1 - e^{-x} \leq x$

Ainsi $\boxed{1 - x \leq e^{-x} \leq 1.}$

3b - $\int_0^x f_N(t)\,dt = \int_0^x \sum_{k=0}^{N} \frac{(-t)^k}{k!}\,dt = \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k}{k!} \int_0^x t^k\,dt$

$= \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k}{k!} \frac{x^{k+1} - 0}{k+1} = \sum_{k=0}^{N} \frac{(-1)^k x^{k+1}}{(k+1)!}$

$= -\sum_{\substack{j=k+1 \\ j=1}}^{N+1} \frac{(-x)^j}{j!} = -\left(f_{N+1}(x) - 1\right)$

$$\boxed{\int_0^x f_N(t)dt = 1 - f_{N+1}(x)}$$

3.c: Par récurrence sur $n \geq 1$. $\boxed{\forall x \geq 0,\ f_{2n-1}(x) \leq e^x \leq f_{2n}(x).}$

Initialisation : Pour $n = 1$, si $x \geq 0$,

$f_1(x) = 1 - x$; $f_2(x) = 1 - x + \frac{x^2}{2}$.

Or, d'après 3.a), $\forall t \geq 0,\ 1-t \leq e^{-t} \leq 1$

donc $\forall t \geq 0,\ f_1(t) \leq e^{-t} \leq f_0(t)$.

En intégrant sur $[0;x]$ et en utilisant 3.b), on obtient

$$1 - f_2(x) \leq 1 - e^{-x} \leq 1 - f_1(x)$$

donc $f_1(x) \leq e^{-x} \leq f_2(x)$

Hérédité : Si, pour un $n \in \mathbb{N}$, $\forall x \geq 0,\ f_{2n-1}(x) \leq e^{-x} \leq f_{2n}(x)$, (HR)

En intégrant (HR) sur $[0;x]$,

$$1 - f_{2n}(x) \leq 1 - e^{-x} \leq 1 - f_{2n+1}(x)$$

donc $f_{2n+1}(x) \leq e^{-x} \leq f_{2n}(x)$

puis en réintégrant, $1 - f_{2n+2}(x) \leq e^{-x} \leq 1 - f_{2n+1}(x)$

donc $f_{2n+1}(x) \leq e^{-x} \leq f_{2n+2}(x)$

Ce qui établit la récurrence.

3.d) Ainsi, pour $x = 1$, $\forall n \in \mathbb{N},\ S_{2n+1} \leq \frac{1}{e} \leq S_{2n}$

Or $S_{2n} \longrightarrow \ell$ et $S_{2n+1} \longrightarrow \ell$ donc par encadrement et par unicité de la limite, $\ell = \frac{1}{e}$.

$$\boxed{\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \xrightarrow[n \to +\infty]{} \frac{1}{e}.}$$

4.a) Vu la question 3.c) et avec le même raisonnement qu'en 1.c) on obtient

$$\boxed{\forall N \in \mathbb{N},\ \forall x \geq 0,\ \left| f_N(x) - e^{-x} \right| \leq \frac{x^{N+1}}{(N+1)!}.}$$

4.b) Comme $\frac{x^{N+1}}{(N+1)!} \longrightarrow 0$ directement si $x \leq 1$, par croissances comparées si $x > 1$,

On a directement vu 4.a) $f_n(x) = \boxed{\sum_{k=0}^{n} \frac{(-x)^k}{k!} \xrightarrow[n \to +\infty]{} e^{-x}.}$