Devoir Libre n° 11

Loi de groupe sur une hyperbole

A. Étude de fonction

1. On a directement que $\boxed{f \text{ est définie sur }]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[}$, $\boxed{\text{dérivable sur }]-\infty,-1[\cup]1,+\infty[}$ et paire donc $\boxed{\text{il suffit de l'étudier sur }]1,+\infty[}$ et de faire une symétrie par rapport à l'axe (Oy).

2. Pour tout $x \in]-\infty,-1]\cup[1,+\infty[$, $\boxed{f'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{3(x^2-1)}}.}$

3. f est continue en 1 et $f'(x)\xrightarrow[x\to 1^+]{}+\infty$ donc $\boxed{\mathscr{C}_f \text{ admet en 1 une tangente verticale}}$ d'après le théorème de la limite de la dérivée.

4.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$				$+$	
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0		0	$\nearrow$	$+\infty$

5. On multiplie par la quantité conjuguée

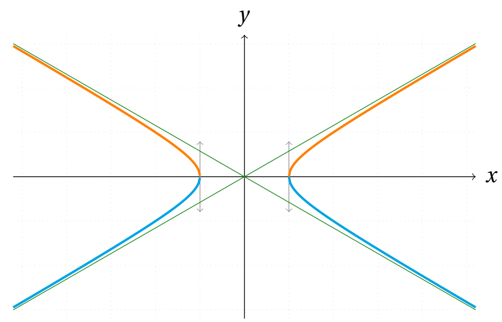
$$f(x)-\frac{x}{\sqrt{3}}=\frac{-1}{\sqrt{3}\sqrt{x^2-1}+x}=\frac{-1}{\sqrt{3}(x+o(x)+x)}=\frac{-1}{2\sqrt{3}x+o(x)}$$

donc $\boxed{f(x)-\dfrac{x}{\sqrt{3}}\sim-\dfrac{1}{2\sqrt{3}x}.}$

6. Comme $f(x)-\dfrac{x}{\sqrt{3}}\sim-\dfrac{1}{2\sqrt{3}x}\xrightarrow[x\to+\infty]{}0^-$, $f(x)-\dfrac{x}{\sqrt{3}}\xrightarrow[x\to+\infty]{}0^-$.

Donc $\boxed{\text{la droite d'équation } y=\dfrac{x}{\sqrt{3}} \text{ est asymptote en } +\infty \text{ et } \mathscr{C}_f \text{ se trouve en dessous.}}$

7. Par parité et symétrie d'axe vertical, $\boxed{\text{la droite d'équation } y=-\dfrac{x}{\sqrt{3}} \text{ est asymptote}}$ en $\boxed{-\infty}$ et $\boxed{\text{la courbe se situe en dessous.}}$



Le tracé de $\mathscr{C}_f$ est en orange, les asymptotes sont en vert.

B. Tracé de $\mathscr{H}$

8. En posant $y=0$ dans l'équation de $\mathscr{H}$, on obtient $x^2=\pm 1$. Donc $\boxed{A(1,0) \text{ et } A'(-1,0).}$

9. Comme

$$x^2-3y^2=1 \iff y=\pm f(x),$$

$\boxed{\text{il suffit de faire une symétrie d'axe } (Ox) \text{ dans le graphe de } f.}$

C. Une loi de composition interne sur le plan

10. Par symétrie des coordonnées (x,y) et (x',y') dans l'expression de $\star$, et par commutativité de $+$ et $\times$ sur $\mathbb{R}$, on a que $\boxed{\star \text{ est commutative sur } \mathscr{P}.}$

Ensuite, en regardant les expressions de α et β on conjecture sans mal que $\boxed{A(1,0) \text{ est neutre de } \star.}$

En effet, si $M(x,y)\in\mathscr{P}$, $M\star A(x+0,0+y)$ donc $M\star A=M$ et $A\star M(x+0,y+0)$ donc $A\star M=M$.

11.a) On a $F(M)=0$ si et seulement si $x^2-3y^2=0$. $\boxed{\{M\in\mathscr{P} \mid F(M)=0\} \text{ est la réunion des asymptotes de } \mathscr{H},}$ d'équation $x=\pm\sqrt{3}y$.

On a $F(M)=1$ si et seulement si $x^2-3y^2=1$. $\boxed{\{M\in\mathscr{P} \mid F(M)=1\}=\mathscr{H}.}$

11.b) Si $M(x,y)$ et $M'(x',y')$,

$$\begin{aligned}F(M\star M')&=(xx'+3yy')^2-3(xy'+yx')^2\\&=x^2x'^2+6xyx'y'+9y^2y'^2-3x^2y'^2-6xyx'y'-3y^2x'^2\\&=x^2x'^2+9y^2y'^2-3x^2y'^2-3y^2x'^2\\&=x^2(x'^2-3y'^2)-3y^2(x'^2-3y'^2)\\&=(x^2-3y^2)(x'^2-3y'^2)\end{aligned}$$

Donc $\boxed{F(M\star M')=F(M)F(M').}$

11.c) D'après les deux questions précédentes, si M et M' appartiennent à $\mathscr{H}$,

$$F(M) = F(M') = 1$$

donc $F(M \star M') = 1$ donc $\boxed{M \star M' \in \mathscr{H}}$.

D. Structure de groupe sur $\mathscr{H}$

12. On a déjà que $\star$ est une loi de composition interne d'après la question précédente, qu'elle est associative et commutative sur $\mathscr{H}$ et qu'elle admet un élément neutre $A \in \mathscr{H}$ d'après la question **3.a)**.

Reste à prouver que tout point $M \in \mathscr{H}$ admet un symétrique pour $\star$ sur $\mathscr{H}$. Soit M' le symétrique de M par rapport à (Ox). Alors M' est un point de $\mathscr{H}$ car (Ox) en est un axe de symétrie, et si $M(x, y)$, $M'(x, -y)$ et $M \star M'$ a comme coordonnées $(x^2 - 3y^2, -xy + yx) = (1, 0)$ donc $M \star M' = A (= M' \star M$ par commutativité.) Donc M' est bien le symétrique de M dans $\mathscr{H}$.

Finalement, $\boxed{(\mathscr{H}, \star) \text{ est un groupe abélien.}}$

13.

- On a $\mathscr{H}^+ \subset \mathscr{H}$,
- $\mathscr{H}^+ \neq \varnothing$ car $A(1, 0) \in \mathscr{H}^+$.
- Si $M(x, y)$, $M'(x', y') \in \mathscr{H}$, alors $M \star M' \in \mathscr{H}$ d'après ce qui précède, et l'abscisse de $M \star M'$ est $xx' + 3yy'$ avec $x^2 - 3y^2 = 1 = x'^2 - 3y'^2$ donc $3y^2 < x^2$ puis $3y'^2 < x'^2$ d'où $-3yy' \leqslant 3|yy'| < xx'$ d'où $xx' + 3yy' > 0$ et $M \star M' \in \mathscr{H}^+$.
- De plus, si $M \in \mathscr{H}^+$, $M^{-1}(x, -y) \in \mathscr{H}^+$.

Finalement, $\boxed{\mathscr{H}^+ \text{ est un sous-groupe de } \mathscr{H}.}$

$\boxed{\mathscr{H}^- = \mathscr{H} \setminus \mathscr{H}^+ \text{ n'est pas un sous-groupe}}$ car il ne contient pas le neutre A.

E. Construction géométrique du composé de deux points de $\mathscr{H}$

14. On a les points $M(x, y)$ et $M'(x', y')$ de $\mathscr{H}$ avec $(x', y') \neq (x, -y)$ et le point

$$N = M \star M'(xx' + 3yy', xy' + yx').$$

La droite (MM') est dirigée par $\overrightarrow{MM'}(x' - x, y' - y)$ et la droite (AN) par

$$\overrightarrow{AN}(xx' + 3yy' - 1, xy' + yx').$$

Or

$$\begin{aligned}\operatorname{Det}\left(\overrightarrow{MM'}, \overrightarrow{AN}\right) &= \begin{vmatrix} x' - x & xx' + 3yy' - 1 \\ y' - y & xy' + yx' \end{vmatrix} = (x' - x)(xy' - yx') - (y' - y)(xx' + 3yy' - 1) \\ &= y(x'^2 - 3y'^2 - 1) - y'(x^2 - 3y^2 - 1)\end{aligned}$$

après simplifications. Comme M, M' sont sur $\mathscr{H}$, on en déduit que $\operatorname{Det}\left(\overrightarrow{MM'}, \overrightarrow{AN}\right) = 0$.

Ainsi, $\boxed{\text{la droite } (MM') \text{ est parallèle à la droite } (AN).}$

15. D'après les questions précédentes, le point $M \star M'$ est obtenu de la manière suivante :

- C'est le point A si M, M' sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.
- En prenant l'intersection avec $\mathscr{H}$ de la droite passant par A parallèle à (MM') sinon.

Si $M(x_0, y_0)$, la tangente est dirigée par $\vec{u}(3y_0, x_0)$ et $N = M \star M(x_0^2 + 3y_0^2, 2x_0y_0)$. Or

$$\operatorname{Det}\left(\vec{u}, \overrightarrow{AN}\right) = \begin{vmatrix} 3y_0 & x_0^2 + 3y_0^2 - 1 \\ x_0 & 2x_0y_0 \end{vmatrix} = 3y_0(2x_0y_0) - x_0(x_0^2 + 3y_0^2 - 1) = -x_0(x_0^2 - 3y_0^2 - 1).$$

Comme M est sur $\mathscr{H}$, on en déduit que $\operatorname{Det}\left(\vec{u}, \overrightarrow{AN}\right) = 0$.

Ainsi $\boxed{\text{la droite } (AN) \text{ est parallèle à la tangente en } M.}$

Le point $M \star M$ est obtenu en prenant l'intersection avec $\mathscr{H}$ de la droite passant par A parallèle à la tangente à $\mathscr{H}$ en M.

Fin