

Corrigé du DL 12

PROBLÈME

1.a) $\forall x \in \mathbb{R}, x+2 \in \mathbb{R}$ et

$$f(x+2) = \left| x+2-2 \left\lfloor \frac{x+1}{2} + 1 \right\rfloor \right| = \left| x+2-2 \left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor - 2 \right| = f(x)$$

car si $k \in \mathbb{Z}$ et $X \in \mathbb{R}$, $\lfloor X+k \rfloor = \lfloor X \rfloor + k$. Donc f est 2-périodique.

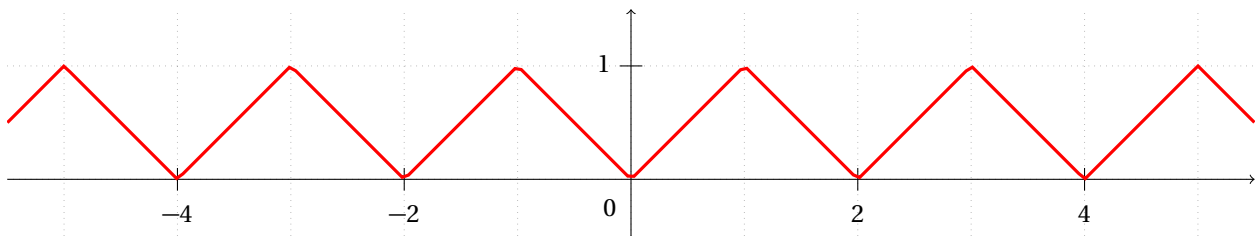
1.b) Si $x \in [0, 1[$, $\frac{x+1}{2} \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right[$ donc $\left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor = 0$ et $f(x) = x$.

Si $x \in [1, 2]$, $\frac{x+1}{2} \in \left[1, \frac{3}{2} \right]$ donc $\left\lfloor \frac{x+1}{2} \right\rfloor = 1$ et $f(x) = 2-x$.

Donc $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, 1[\\ 2-x & \text{si } x \in [1, 2] \end{cases}$.

1.c) D'après la question précédente, si $x \in [0, 1[$ ou $x \in [1, 2]$, $f(x) \leq 1$. Par 2-périodicité, f est majorée par 1.

1.d)



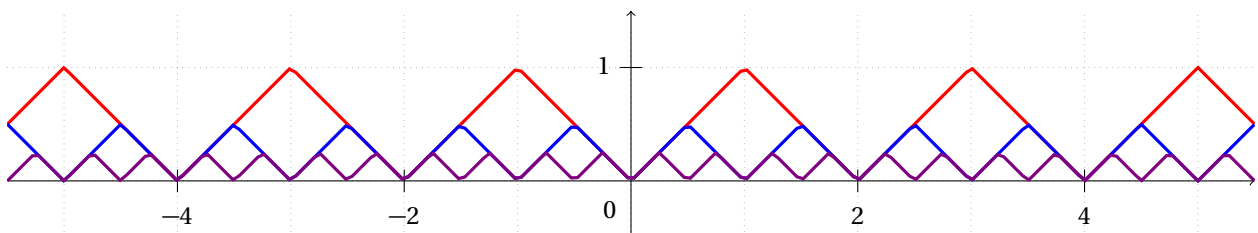
En Python :

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 x = np.arange(-6, 6, .1)
5 f = abs(x - 2 * np.floor((x + 1) / 2))
6 plt.plot(x, f)
7 plt.axis([-5.5, 5.5, 0, 1.5])
8 plt.grid(True)
9 plt.show()
```

Python

1.e) Vu le c), f est continue sur $]0, 1[$ et sur $]1, 2[$, et comme on a bien $f(x) = x \rightarrow 1 = f(1)$ et $f(x) = 2-x \rightarrow 1 = f(1)$, f est aussi continue en 1. De plus, $f(0^+) = 0 = f(2^-)$ donc par 2-périodicité f est aussi continue en 0 et 2, et donc f est continue sur \mathbb{R} .

2.a)



En Python :

Python

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 def f(x):
5     return abs(x - 2 * np.floor((x + 1) / 2))
6
7 def f_k(x,k):
8     return f(2 ** k * x) / 2 ** k
9
10 x = np.arange(-6, 6, .05)
11 for k in range(3):
12     plt.plot(x, f_k(x,k))
13 plt.axis([-5.5, 5.5, 0, 1.5])
14 plt.grid(True)
15 plt.show()
```

2.b) Vu les propriétés de f , f_k est sur tout intervalle de la forme $\left[\frac{j}{2^k}, \frac{j+1}{2^k}\right]$ affine de pente ± 1 .

2.c) Pour tout n , $S_{n+1}(x) - S_n(x) = f_{n+1}(x) \geq 0$ Donc la suite $(S_n(x))$ est croissante donc a une limite. De plus, comme f est majorée par 1, on a pour tout n , $S_n(x) \leq \sum_{k=0}^n 2^{-k} = \frac{1-2^{-(n+1)}}{1-2^{-1}} = 2-2^{-n} \leq 2$ donc la suite est majorée.

Ainsi, la suite $(S_n(x))$ converge.

2.d) $|S_p(x) - S_n(x)| = \sum_{k=n+1}^p f_k(x) \leq \sum_{k=n+1}^p 2^{-k} = 2^{-(n+1)} \frac{1-2^{-(p-n)}}{1-2^{-1}}$ donc $|S_p(x) - S_n(x)| \leq \frac{1-2^{n-p}}{2^n}$.

2.e) En faisant tendre p vers l'infini (et par continuité de $x \mapsto |x|$), on obtient $|S(x) - S_n(x)| \leq 2^{-n}$.

2.f) Par inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} |S(x) - S(x_0)| &= |S(x) - S_n(x) + S_n(x) - S_n(x_0) + S_n(x_0) - S(x_0)| \\ &\leq |S(x) - S_n(x)| + |S_n(x) - S_n(x_0)| + |S_n(x_0) - S(x_0)| \end{aligned}$$

2.g) Ainsi, d'après la question précédente, pour tout n ,

$$|S(x) - S(x_0)| \leq 2 \cdot 2^{-n} + |S_n(x) - S_n(x_0)|.$$

Fixons un $\varepsilon > 0$. Comme $2 \cdot 2^{-n} \rightarrow 0$, on a un entier N tel que $2 \cdot 2^{-N} \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Alors $|S(x) - S(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + |S_N(x) - S_N(x_0)|$.

Puis, par continuité de S_N (qui provient directement de celle de f), on a un $\eta > 0$ tel que si $|x - x_0| \leq \eta$,

$$|S_N(x) - S_N(x_0)| \leq \frac{\varepsilon}{2}.$$

On a alors bien $\forall x_0 \in \mathbb{R}, \forall \varepsilon > 0, \exists \eta > 0, |x - x_0| < \eta \Rightarrow |S(x) - S(x_0)| \leq \varepsilon$.

Donc S est continue sur \mathbb{R} .

3.a) Comme $[2^n x] \leq 2^n x < [2^n x] + 1$, on a $x_n \leq x < x'_n$.

On remarque ensuite que

• $0 \leq x - x_n \leq 2^{-n}$ donc $x_n \rightarrow x$ par encadrement.

• $0 \leq x'_n - x \leq 2^{-n}$ donc $x'_n \rightarrow x$ par encadrement.

3.b) x_n et x'_n sont de la forme $\frac{p}{2^n}$ avec $p \in \mathbb{Z}$.

Si $k > n$, $f_k\left(\frac{p}{2^n}\right) = 2^{-k} f\left(\underbrace{2^{k-n} p}_{\in 2\mathbb{Z}}\right) = 0$ car $f(0) = 0$ et f est 2-périodique.

Donc $\boxed{\text{si } k > n, f_k(x_n) = f_k(x'_n) = 0.}$

3.c) Si $N > n$, pour $k \in \llbracket n+1, N \rrbracket$, $f_k(x_n) = f_k(x'_n) = 0$ d'après la question précédente, donc $S_N(x_n) = S_n(x_n)$ et $S_N(x'_n) = S_n(x'_n)$.

On a bien $\boxed{S_N(x'_n) - S_N(x_n) = \sum_{k=0}^n (f_k(x'_n) - f_k(x_n)).}$

3.d) En faisant $N \rightarrow \infty$, on obtient $S(x'_n) - S(x_n) = \sum_{k=0}^n (f_k(x'_n) - f_k(x_n))$ donc $\boxed{D_n = \sum_{k=0}^n \varepsilon_{k,n}}$ avec $\varepsilon_{k,n} = \frac{f_k(x'_n) - f_k(x_n)}{x'_n - x_n}$

(qui dépend de k et de n).

Or, pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ si on avait un $j \in \mathbb{Z}$ tel que $x_n < \frac{j}{2^k} < x'_n$, on aurait

$$2^{n-k} j \in]\lfloor 2^n x \rfloor, \lfloor 2^n x \rfloor + 1[\cap \mathbb{Z} = \emptyset$$

ce qui est contradictoire, et donc x_n et x'_n sont tous deux dans un intervalle du type $\left[\frac{j}{2^k}, \frac{j+1}{2^k}\right]$.

D'après **2.b**, $\boxed{\varepsilon_{k,n} = \pm 1.}$

3.e) On remarque que $(D_n) \in \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$, donc si (D_n) converge, elle est stationnaire (car à partir d'un certain rang, $|D_{n+1} - D_n| < \frac{1}{2}$ donc $D_n = D_{n+1}$). Or D_n est alternativement impair et pair, ce qui est contradictoire.

Autre rédaction possible : si (D_n) converge, à partir d'un certain rang, $|D_{n+1} - D_n| < \frac{1}{2}$, or $|D_{n+1} - D_n|$ est un entier impair (somme de $2n+3$ termes ± 1), ce qui est contradictoire.

Donc $\boxed{(D_n) \text{ diverge.}}$

4.a) $\boxed{\alpha_n \text{ est bien défini}}$ car $x'_n - x'_n > 0$ et avec l'encadrement de 3.a, on a directement $\boxed{\alpha_n \in]0, 1].}$

4.b) Ainsi, la suite (α_n) est bornée et la suite $\left(\frac{S(x'_n) - S(x)}{x'_n - x} - S'(x)\right)$ converge vers 0 car $x'_n \rightarrow x$, donc

$$\boxed{\alpha_n \left(\frac{S(x'_n) - S(x)}{x'_n - x} - S'(x)\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.}$$

4.c)

$$D_n - S'(x) = \frac{x'_n - x}{x'_n - x_n} \times \frac{S(x'_n) - S(x)}{x'_n - x} + \frac{x - x_n}{x'_n - x_n} \times \frac{S(x) - S(x_n)}{x - x_n} - (\alpha_n + 1 - \alpha_n) S'(x)$$

Donc $\boxed{D_n - S'(x) = \alpha_n \left(\frac{S(x'_n) - S(x)}{x'_n - x} - S'(x)\right) + (1 - \alpha_n) \left(\frac{S(x_n) - S(x)}{x_n - x} - S'(x)\right).}$

4.d) Par b), $\alpha_n \left(\frac{S(x'_n) - S(x)}{x'_n - x} - S'(x)\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$ et de même

$$(1 - \alpha_n) \left(\frac{S(x_n) - S(x)}{x_n - x} - S'(x)\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

donc $\boxed{D_n - S'(x) \rightarrow 0.}$

4.e) On aurait alors $D_n = (D_n - S'(x)) + S'(x) \rightarrow S'(x)$ ce qui contredit 3.e). $\boxed{S \text{ n'est dérivable en aucun point.}}$