

Devoir Libre n° 13

On veillera à présenter très clairement sa copie, et en particulier encadrer toutes les réponses.

Problème autour de Fibonacci¹

On note pour tout le problème, $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ le nombre d'or et $\psi = -\frac{1}{\varphi} = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

I. La suite de Fibonacci

On s'intéresse à la suite de Fibonacci définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

On demande de traiter les questions 1 à 7 sans déterminer le terme général de la suite $(F_n)_n$.

- Calculer les 10 premiers termes de la suite.
- Montrer que la suite est à valeur entière et est croissante.
- Quelle est la limite de la suite $(F_n)_n$?
- Montrer que $\varphi^2 = 1 + \varphi$ puis que pour tout $n \geq 2$, $\varphi^{n-2} \leq F_n \leq \varphi^{n-1}$.
- Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $F_0 + F_1 + \dots + F_n = F_{n+2} - 1$.
- Illustrer, dans le triangle de Pascal, la formule

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n \binom{n-k}{k} = F_{n+1}$$

(des termes sont nuls dans la somme) puis la démontrer.

On pourra appliquer la formule de Pascal à $\binom{n+1-k}{k}$.

7. Quelques propriétés arithmétiques

7.a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $F_n^2 - F_{n-1}F_{n+1} = (-1)^{n+1}$.

7.b) En déduire $\forall n \in \mathbb{N}$, F_n et F_{n+1} sont premiers entre eux.

7.c) Établir que pour tout $m \in \mathbb{N}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$F_{m+n} = F_n F_{m+1} + F_{n-1} F_m,$$

et en particulier²

$$F_{2n-1} = F_n^2 + F_{n-1}^2 \quad \text{et} \quad F_{2n} = F_n^2 + 2F_n F_{n-1}$$

- 7.d)** Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a $F_{m+n} \wedge F_n = F_n \wedge F_m$.
- 7.e)** En déduire que $F_m \wedge F_n = F_n \wedge F_r$ où r est le reste de la division euclidienne de m par n .
- 7.f)** Conclure, à l'aide de l'algorithme d'Euclide, que $F_n \wedge F_m = F_{m \wedge n}$.
- 7.g)** En déduire que, si $n > 2$, $F_n | F_m \iff n | m$.
- 7.h)** Montrer que si F_n est premier, alors soit $n = 4$, soit n est premier impair.
- 7.i)** Vérifier que F_8 est le premier terme non nul divisible par 7.
Justifier l'équivalence $7 | F_n \iff 7 | F_{n \wedge 8}$.
En déduire que 7 divise F_n si et seulement si n est un multiple de 8.
- Établir que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $F_1 + F_3 + \dots + F_{2n-1} = F_{2n}$.
- Déterminer le terme général F_n en fonction de n . On fera apparaître φ et ψ .
- Déterminer un équivalent de F_n et retrouver le résultat de la question 3.



Léonard de Pise, dit Fibonacci (Pise, 1170 - Pise, 1245) est un mathématicien italien. Il introduit en Europe le système décimal et l'écriture des nombres en chiffres arabes. On connaît surtout la suite qui porte son nom, définie par $u_0 = 0$, $u_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} = u_n + u_{n-1}$, introduite initialement pour illustrer la reproduction de lapins, et qui est telle que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ converge vers le nombre d'or.

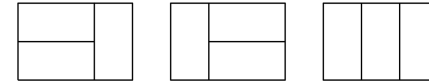
1.

2. Ces formules permettent en particulier d'écrire un algorithme de complexité logarithmique pour calculer F_n , mais ce n'est pas demandé ici.

II. Intermédiaire : un dénombrement

On souhaite déterminer, pour $n \geq 1$, le nombre a_n de façons de paver un rectangle de taille $2 \times n$ avec des rectangles de taille 1×2 disposés horizontalement ou verticalement.

Par exemple, pour $n = 3$, $a_3 = 3$:



- Déterminer une relation de récurrence liant a_{n+2} , a_{n+1} et a_n en la justifiant soigneusement.
- Quel est le lien avec la suite de Fibonacci ?

III. D'après CCP MP 2016 : un intermédiaire informatique

Les algorithmes demandés doivent être écrits en Python. On sera très attentif à la rédaction et notamment à l'indentation du code. Cet exercice étudie deux algorithmes permettant le calcul du pgcd (plus grand diviseur commun) de deux entiers naturels.

1. Pour calculer le pgcd de 3705 et 513, on peut passer en revue tous les entiers $1, 2, 3, \dots, 512, 513$ puis renvoyer parmi ces entiers le dernier qui divise à la fois 3705 et 513. Il sera alors bien le plus grand des diviseurs commun à 3705 et 513. Écrire une fonction `gcd` qui renvoie le pgcd de deux entiers naturels non nuls, selon la méthode décrite ci-dessus. On pourra éventuellement utiliser librement l'instruction `min(a, b)` qui calcule le minimum de a et b . Par exemple `gcd(3705, 513)` renverra 57.

2. Écrire une fonction « récursive » `euclide` qui calcule le pgcd de deux entiers naturels selon l'algorithme d'Euclide.

3. On note toujours $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite des nombres de Fibonacci définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}$, $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$.

3.a) Écrire les divisions euclidiennes successivement effectuées lorsque l'on calcule le pgcd de $F_8 = 8$ et $F_5 = 5$ avec la fonction `euclide`.

3.b) Soit $n \geq 2$ un entier. Quel est le reste de la division euclidienne de F_{n+2} par F_{n+1} ? En déduire le nombre u_n de divisions euclidiennes effectuées lorsque l'on calcule le pgcd de F_{n+2} et F_{n+1} avec la fonction `euclide`.

3.c) Comparer pour n au voisinage de $+\infty$, ce nombre u_n , avec le nombre v_n de divisions euclidiennes effectuées pour le calcul du pgcd de F_{n+2} et F_{n+1} par la fonction `gcd`.

On pourra utiliser librement que F_n est équivalent au voisinage de $+\infty$, à $\frac{\varphi^n}{\sqrt{5}}$.

4. Écrire une fonction `fib0` qui prend en argument un entier naturel n et renvoie le nombre de Fibonacci F_n . Par exemple, `fib0(6)` renverra 8.

5. En utilisant la fonction `euclide`, écrire une fonction `gcd_trois` qui renvoie le pgcd de trois entiers naturels. Par exemple, `gcd_trois(18, 30, 12)` renverra 6.

IV. Le Théorème de Lamé : nombre d'étapes de l'algorithme d'Euclide

Dans l'application de l'algorithme d'Euclide à deux entiers a et b , avec $a > b > 0$, on note $(r_n)_n$ la suite des restes successifs et $(q_n)_n$ la suite des quotients successifs, avec $r_0 = a$ et $r_1 = b$.

Ainsi, pour tout $k \geq 1$,

$$r_{k-1} = r_k \cdot q_{k+1} + r_{k+1}.$$

1. Rappeler la raison pour laquelle l'algorithme s'arrête et où apparaît le pgcd de a et b .

On note n l'entier tel que $a \wedge b = r_n$ et on suppose que $n \geq 2$.

2. Montrer que $q_{n+1} \geq 2$ puis que $r_n \geq F_2$ et $r_{n-1} \geq F_3$.

3. Montrer que $\forall k \in \llbracket 2, n \rrbracket$, $q_k \geq 1$ et, par récurrence, que $\forall k \in \llbracket 2, n+2 \rrbracket$, $r_{n+2-k} \geq F_k$.

4. En déduire que si l'algorithme d'Euclide pour $a > b$ s'effectue avec n divisions, $a \geq F_{n+2}$, $b \geq F_{n+1}$.

5. En déduire que le **théorème de Lamé** : le nombre de divisions dans l'algorithme d'Euclide pour $a > b$ est majoré par $1 + \left\lfloor \frac{\ln b}{\ln \varphi} \right\rfloor$ (Utiliser la question I.4).

6. Montrer que le nombre d'étapes dans l'algorithme d'Euclide est au plus égal à 5 fois le nombre de chiffres du plus petit des deux entiers.

FIN DE L'ÉNONCÉ