Devoir Libre nº 13

Les consignes de présentation sont les mêmes que d'habitude.

Problème : Postulat de Bertrand

Le but du problème est d'établir le postulat conjecturé par Joseph Bertrand en 1845 puis démontré par Pafnouti Lvovitch Tchebychev [1] en 1850, plus simplement par Srinivasa Ramanujan en 1919 et de façon élémentaire par Paul Erdős en 1932 à l'âge de 19 ans. C'est cette dernière démonstration qu'on propose dans ce problème.

Il s'énonce ainsi :

Postulat de Bertrand

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe un nombre premier p tel que

$$n < p \leqslant 2n.$$

Première partie : une formule de Legendre

On se donne un entier $n \geqslant 2$ et un nombre premier p.

Le but de cette partie est d'établir le résultat suivant :

Formule de Legendre

$$v_p(n!) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$$

où v_p désigne la valuation p-adique.

1. Déterminer, pour tout entier naturel non nul k, le nombre n_k de multiples de p^k compris entre 1 et n.

2. En déduire la formule de Legendre en justifiant avec soin et prouver que la somme est bien finie en explicitant l'indice k du dernier terme non nul.

Deuxième partie : une inégalité de Tchebychev

Pour $x \in \mathbb{R}$, on note $\prod_{p \leqslant x} p$ le produit des nombres premiers p inférieurs à x, et p désignera toujours un nombre premier dans la suite du problème.

Le but de cette partie est d'établir :

Inégalité de Tchebychev

Pour tout réel $x \geqslant 2$,

$$\prod_{p \leqslant x} p \leqslant 4^{x-1}$$

3. Soit $m \in \mathbb{N}^*$.

3.a) En remarquant que $\binom{2m+1}{m} = \binom{2m+1}{m+1}$ (à justifier) et que $2^{2m+1} = (1+1)^{2m+1}$, justifier que $\binom{2m+1}{m} \leqslant 4^m$.

3.b) Montrer que tous les nombres premiers $p \in [\![m+2, 2m+1]\!]$ divisent $\binom{2m+1}{m}$ et en déduire que

$$\prod_{m+2 \leqslant p \leqslant 2m+1} p \leqslant 4^m.$$

4. Montrer par récurrence forte que l'inégalité de Tchebychev est vraie pour tout entier $x = n \geqslant 2$.

Indication : on pourra séparer les cas où n est pair ou impair.

5. En déduire qu'elle est vraie pour tout réel $x \geqslant 2$.

Troisième partie : un lemme technique

On se propose dans cette partie d'établir le résultat technique suivant :

Si n est un entier supérieur ou égal à 3,

$$4^n \leqslant (2n)^{\sqrt{2n}} \prod_{\sqrt{2n} < p \leqslant \frac{2}{3}n} p \prod_{n < p \leqslant 2n} p$$

On fixe un entier $n \geqslant 3$.

6. Pour p premier, on note $m_p = v_p\left(\binom{2n}{n}\right)$.

6.a) Montrer que pour tout réel $x > 0$, $\lfloor 2x \rfloor - 2\lfloor x \rfloor$ vaut 0 ou 1.

6.b) Montrer que tous les facteurs premiers de $\binom{2n}{n}$ sont compris entre 2 et $2n$.

6.c) En utilisant la formule de Legendre, montrer que pour tout nombre premier p,

$$m_p = \sum_{k=1}^{N} \left(\left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \right) \quad \text{avec } N = \left\lfloor \frac{\ln(2n)}{\ln p} \right\rfloor.$$

6.d) Montrer que si p est un nombre premier vérifiant $\sqrt{2n} < p \leqslant 2n$, alors m_p vaut 0 ou 1.

6.e) Montrer que [2] si p est un nombre premier vérifiant $\frac{2}{3}n < p \leqslant n$ alors $m_p = 0$.

6.f) Montrer que pour tout nombre premier p, $p^{m_p} \leqslant 2n$.

Indication : utiliser la question 6.a

6.g) En déduire que

$$\binom{2n}{n} \leqslant (2n)^{\sqrt{2n}-1} \prod_{\sqrt{2n} < p \leqslant \frac{2}{3}n} p \prod_{n < p \leqslant 2n} p.$$

7. Montrer que $\binom{2n}{n} \geqslant \frac{4^n}{2n}$ pour tout entier naturel non nul n.

8. Conclure.

Quatrième partie : le postulat de Bertrand

9. Sachant que les nombres $2, 3, 5, 7, 13, 23, 43, 83, 163, 317, 631$ sont premiers [3], justifier que le postulat de Bertrand est vrai pour $n \leqslant 630$.

Indication : on pourra commencer par prendre l'un des nombres premiers comme valeur de n.

10. Notons, pour $n \geqslant 631$, $P_n = \prod_{n < p \leqslant 2n} p$.

10.a) En utilisant les résultats des parties précédentes, justifier que

$$P_n \geqslant \frac{4^{\frac{n}{3}}}{(2n)^{\sqrt{2n}}}.$$

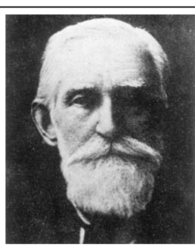
10.b) Soit $f : x \mapsto \frac{6 \ln x}{x}$. Justifier que

$$\ln P_n \geqslant \frac{2n}{3}\left(\ln 2 - f\left(\sqrt{2n}\right)\right) > \frac{2n}{3}\left(f(30) - f\left(\sqrt{2n}\right)\right).$$

10.c) Étudier les variations de f.

10.d) Conclure.

---

1. 

Pafnouti Lvovitch Tchebychev (Russie, 1821 - 1894) est un mathématicien russe. Il est connu pour ses travaux dans le domaine des probabilités et des statistiques. En théorie des nombres, Tchebychev découvre des résultats sur la répartition des nombres premiers. Les polynômes de Tchebychev sont très classiques en classe prépa.

2. La clé de la preuve, selon Erdős.
3. Astuce dite de Landau