Corrigé du Devoir Libre n° 13

Problème autour de Fibonacci

I. La suite de Fibonacci

1. On calcule :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34

2. On montre par récurrence d'ordre 2 que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(n)$: « $F_n \in \mathbb{N}$ ».

- C'est vrai pour $n = 0$ et $n = 1$ (⚠double initialisation **indispensable**),
- Soit $n \geqslant 0$ pour lequel F_n, $F_{n+1} \in \mathbb{N}$. Alors $F_{n+2} = F_n + F_{n+1} \in \mathbb{N}$ ce qui établit la récurrence.

Donc $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ F_n \in \mathbb{N}.}$

On a alors $F_1 \geqslant F_0$ et pour tout $n \geqslant 1$, $F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \geqslant F_n$ car $F_{n-1} \geqslant 0$. Donc $\boxed{(F_n)_n \text{ est croissante.}}$

Remarquons que $F_1 > 0$, donc, par croissante, pour tout $n \geqslant 1$, $F_n > 0$ et on peut donc conclure du calcul ci-dessus que pour tout $n \geqslant 2$, $F_{n+1} > F_n$: $\boxed{(F_n)_n \text{ est strictement croissante à partir du rang 2.}}$

3. Comme (F_n) est croissante, le théorème de la limite monotone (discret) nous dit qu'elle a une limite finie ou infinie.

Comme elle est à valeur entière, elle ne peut converger sans être stationnaire ce qui contredit sa stricte croissance à partir du rang 2.

Autre argument possible : si $F_n \to \ell \in \mathbb{R}$, alors, en faisant $n \to +\infty$ dans la relation de récurrence, $\ell = \ell + \ell$ donc $\ell = 0$ ce qui contredit le fait que pour tout $n \geqslant 1$, $F_n \geqslant F_1 = 1$.

Donc $\boxed{F_n \to +\infty.}$

4. On calcule $\boxed{\varphi^2 = \dfrac{6+2\sqrt{5}}{4} = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2} = 1 + \varphi.}$

Puis on montre que pour tout $n \geqslant 2$, $\mathscr{P}(n)$: « $\varphi^{n-2} \leqslant F_n \leqslant \varphi^{n-1}$ » par récurrence d'ordre 2.

- On a bien $1 = \varphi^0 \leqslant F_2 = 1 \leqslant \varphi \leqslant F_3 = 2 \leqslant \varphi^2 = 1 + \varphi$ (car $2 < \sqrt{5} < 3$),
- Soit $n \geqslant 2$ tel que ce soit aux rangs n et $n+1$. Alors

$$\varphi^{n-2} + \varphi^{n-1} \leqslant F_{n+2} = F_n + F_{n+1} \leqslant \varphi^{n-1} + \varphi^n.$$

Or $\varphi^{n-1} + \varphi^n = \varphi^{n-1}(1+\varphi) = \varphi^{n-1}\varphi^2 = \varphi^{n+1}$ et de même, $\varphi^{n-2} + \varphi^{n-1} = \varphi^n$ ce qui établit la récurrence.

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } n \geqslant 2,\ \varphi^{n-2} \leqslant F_n \leqslant \varphi^{n-1}.}$

5. On calcule, par télescopage, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} F_k = \sum_{k=0}^{n} (F_{k+2} - F_{k+1}) = F_{n+2} - F_1$ donc $\boxed{F_0 + F_1 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1.}$

6. La formule $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \binom{n-k}{k} = F_{n+1}$ se lit sur le triangle (en fait le carré) de Pascal : **« La somme des termes sur la n^e diagonale ascendante (de pente 1) est égale à F_{n+1}. »**

Par exemple pour $F_5 = 5$:

0	0	0	0	0	$\boxed{0}$
1	0	0	0	$\boxed{0}$	0
1	1	0	$\boxed{0}$	0	0
1	2	$\boxed{\mathbf{1}}$	0	0	0
1	$\boxed{\mathbf{3}}$	3	1	0	0
$\boxed{\mathbf{1}}$	4	6	4	1	0

On montre la propriété par récurrence d'ordre 2 sur n.

- On a bien $\sum_{k=0}^{0}\binom{0-k}{k}=\binom{0}{0}=1=F_1$ et $\sum_{k=0}^{1}\binom{1-k}{k}=\binom{1}{0}+\binom{0}{1}=1+0=F_2$.
- Soit $n\geqslant 1$ tel que c'est vrai aux rangs n et $n-1$, alors, d'après la formule de Pascal (étendue aux termes nuls),

$$\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1-k}{k}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1-k}{k}=\sum_{k=0}^{n}\left(\binom{n-k}{k-1}+\binom{n-k}{k}\right)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n-k}{k-1}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n-k}{k}=\sum_{j=-1}^{n-1}\binom{n-1-j}{j}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n-k}{k}$$

avec le changement d'indice $j=k-1$. Or le terme pour $j=-1$ est nul, donc

$$\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1-k}{k}=\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1-j}{j}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n-k}{k}=F_n+F_{n+1}=F_{n+2}$$

par hypothèse de récurrence puis définition de $(F_n)_n$, ce qui établit la récurrence.

On a bien $\boxed{\forall\, n\in\mathbb{N},\ \sum_{k=0}^{n}\binom{n-k}{k}=F_{n+1}.}$

7.a) Soit, pour $n\in\mathbb{N}^*$, $u_n=F_n^2-F_{n-1}F_{n+1}$. On calcule

$$u_{n+1}=F_{n+1}^2-F_nF_{n+2}=F_{n+1}^2-F_n(F_n+F_{n+1})=F_{n+1}(F_{n+1}-F_n)-F_n^2=F_{n+1}F_{n-1}-F_n^2=-u_n.$$

Donc $(u_n)_n$ est une suite géométrique de raison -1 et de premier terme $u_1=F_1^2-F_0\cdot F_2=1$.
Finalement, $\boxed{\text{pour tout } n\in\mathbb{N}^*,\ F_n^2-F_{n-1}F_{n+1}=(-1)^{n+1}.}$

7.b) On en déduit en particulier que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\left((-1)^{n+1}F_n\right)\cdot F_n+((-1)^nF_{n-1})\cdot F_{n+1}=1$, donc, d'après le théorème de Bézout, $\boxed{F_n \text{ et } F_{n+1} \text{ sont premiers entre eux .}}$. Notons que c'est également vrai pour $n=0$ (car $0\wedge 1=1$).

7.c) Pour m **fixé**, on montre que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $\mathscr{P}(n)$: $F_{m+n}=F_nF_{m+1}+F_{n-1}F_m$ par récurrence d'ordre 2 sur n.

- Si $n=1$, c'est vrai : $F_{m+1}=F_{m+1}+0$ et pour $n=2$, on retrouve la définition de la suite de Fibonacci.
- Soit $n\geqslant 1$ pour lequel c'est vrai aux rangs n et $n+1$. Alors $F_{m+n+2}=F_{m+n+1}+F_{m+n}$. Puis, par hypothèse de récurrence,

$$F_{m+n+2}=F_{n+1}F_{m+1}+F_nF_m+F_nF_{m+1}+F_{n-1}F_m=(F_{n+1}+F_n)F_{m+1}+(F_n+F_{n-1})F_m=F_{n+2}F_{m+1}+F_{n+1}F_m$$

ce qui établit la récurrence.

Finalement pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ on a $\boxed{F_{m+n}=F_nF_{m+1}+F_{n-1}F_m.}$
On aurait aussi pu raisonner par récurrence simple sur m en faisant varier n dans l'hypothèse de récurrence et en utilisant le fait que $F_{(m+1)+n}=F_{m+(n+1)}$.

Avec $m=n-1$, on obtient directement $\boxed{F_{2n-1}=F_n^2+F_{n-1}^2,}$ puis avec $m=n$,

$$F_{2n}=F_nF_{n+1}+F_{n-1}F_n=F_n(F_n+F_{n-1})+F_{n-1}F_n$$

donc $\boxed{F_{2n}=F_n^2+2F_nF_{n-1}.}$

7.d) Si $m\in\mathbb{N}$ et $n\in\mathbb{N}^*$, en utilisant la question précédent et la propriété d'Euclide,

$$F_{m+n}\wedge F_n=(F_{m+n}-F_nF_{m+1})\wedge F_n=(F_{n-1}F_m)\wedge F_n=F_n\wedge F_m$$

car si $a\wedge b=1$ alors $(ac)\wedge b=c\wedge b$ se voit par exemple avec la décomposition primaire : les diviseurs premiers de a n'apparaissent pas dans la décomposition de b donc dans celle du pgcd.

Autre solution : d'après la question précédente, tout diviseur commun à F_n et F_m est un diviseur commun à F_{m+n} et F_n. Réciproquement, tout diviseur commun à F_{m+n} et F_n divise $F_{n-1}F_m$ en étant premier avec F_{n-1} car F_n l'est, donc par lemme de Gauss, est un diviseur commun à F_m et F_n.

Ainsi, $\boxed{F_{m+n} \wedge F_n = F_n \wedge F_m.}$

7.e) Par récurrence, on a donc que pour tout $q \in \mathbb{N}$ tel que $m - nq \in \mathbb{N}$, $\mathscr{P}(q)$: « $F_m \wedge F_n = F_n \wedge F_{m-nq}$ ».

En effet, pour $q = 0$ c'est évident. Posons $q \geqslant 0$ pour lequel c'est vrai, alors

$$F_m \wedge F_n = F_n \wedge F_{m-nq} = F_{(m-n(q+1))+n} \wedge F_n = F_n \wedge F_{m-n(q+1)}$$

d'après le résultat précédent, ce qui établit la récurrence.

On en déduit en particulier que $\boxed{F_m \wedge F_n = F_n \wedge F_r}$ où r est le reste de la division euclidienne de m par n.

7.f) En utilisant le résultat précédent et en appliquant l'algorithme d'Euclide à m et n, on en déduit que $\boxed{F_n \wedge F_m = F_{m\wedge n} \wedge F_0 = F_{m\wedge n}.}$

7.g) Soit $n > 2$.

- Si $F_n | F_m$, alors $F_n = F_n \wedge F_m = F_{n\wedge m}$. Mais comme (F_n) est strictement croissante à partir du rang 2, soit $n \wedge m = 1$ soit $n = n \wedge m$. Le premier cas est exclu car $F_n \neq 1$ et le deuxième cas donne $n|m$.
- Réciproquement, si $n|m$, $n \wedge m = n$ donc $F_n \wedge F_m = F_n$ donc $F_n | F_m$.

Finalement, $\boxed{\text{si } n > 2,\ F_n | F_m \Longleftrightarrow n | m.}$

7.h) On suppose que F_n est premier avec $n \geqslant 5$ et que $d > 1$ est un diviseur de n.

D'après la question précédente, si $d > 2$, $F_d | F_n$ donc, comme F_n est premier, $F_d = F_n$ puis $d = n$ vu la stricte monotonie à partir du rang 2.

Si $d = 2$, on peut appliquer le même raisonnement $d' > 2$ tel que $n = 2d'$ qui donne $d' = n$ ce qui est contradictoire.

On en déduit donc que $\boxed{n \text{ est premier et impair}}$ (car au moins égal à 5).

Enfin on vérifie que parmi F_0, F_1, F_2, F_3 et F_4, seuls $\boxed{F_3 \text{ et } F_4 \text{ sont premiers,}}$ ce qui termine de répondre à la question.

7.i) $\boxed{F_8 = 21 \text{ est bien le premier terme divisible par 7.}}$

Comme $7 | F_8$, et comme les diviseurs du pgcd sont exactement les diviseurs communs, $\boxed{7 | F_n \Longleftrightarrow 7 | F_n \wedge F_8 = F_{n\wedge 8}}$ d'après 7.f.

Comme $n \wedge 8 \leqslant 8$, d'après ce qui précède, $\boxed{7 \text{ divise } F_n \text{ ssi } n \wedge 8 = 1 \text{ ssi } n \text{ est un multiple de 8.}}$.

---

8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On calcule, par télescopage,

$$\sum_{k=1}^{n} F_{2k-1} = \sum_{k=1}^{n} (F_{2k} - F_{2k-2}) = \sum_{k=1}^{n} (F_{2k} - F_{2(k-1)}) = F_{2n} - F_0$$

donc $\boxed{F_1 + F_3 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n}.}$

---

9. Il s'agit d'une suite vérifiant une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 à cœfficients constants, d'équation caractéristique $r^2 - r - 1 = 0$ dont les racines sont φ et $\psi = -\frac{1}{\varphi}$.

Donc on a $A, B \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $F_n = A\varphi^n + B\psi^n$. En traduisant que $F_0 = 0$ et $F_1 = 1$, on obtient $A = -B = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Finalement, $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ F_n = \frac{\varphi^n - \psi^n}{\sqrt{5}}.}$

---

10. Comme $\varphi > 1$, $-1 < \psi < 0$ donc $\psi^n \to 0$ $\varphi \to +\infty$ donc ψ^n est négligeable devant φ^n et $\boxed{F_n \sim \frac{\varphi^n}{\sqrt{5}}.}$

En particulier, $F_n \to +\infty$.

II. Intermède : un dénombrement

1. Pour recouvrir un rectangle de taille $2\times(n+2)$ par des rectangles de taille 1×2, on a deux possibilités disjointes :

- Soit on commence par un rectangle vertical et il reste à remplir un rectangle de taille $2\times(n+1)$,
- Soit on commence par deux rectangles horizontaux et il reste à remplir un rectangle de taille $2\times n$.

Cela traduit le fait que $\boxed{a_{n+2}=a_{n+1}+a_n.}$

2. Comme $a_1=0=F_0$, $a_2=1=F_1$, et comme la relation de récurrence est la même, on en déduit que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\boxed{a_n=F_{n+1}.}$ (par récurrence)

III. D'après CCP MP 2016 : un intermède informatique

1.

```python
def gcd(a, b):
    "renvoie le pgcd de a et de b."
    pgcd = 1
    for d in range(2, min(a, b) + 1):
        if a % d == b % d == 0:
            pgcd = d
    return pgcd
```

2.

```python
def euclide_rec(a, b):
    if b == 0:
        return a
    else:
        return euclide_rec(b, a % b)
```

3.a) $8=5\times1+3\,;\,5=3\times1+2\,;\,3=2\times1+1\,;\,2=1\times2+0$

3.b) $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$ avec $F_n<F_{n+1}$ si $n\geqslant 2$ d'après l'étude de la partie I.

Donc le reste de la division euclidienne de F_{n+2} par F_{n+1} est F_n.

Il faudra donc $n-1$ divisions euclidiennes pour arriver à $F_4=3=F_3+F_2=2+1$ et donc n divisions euclidiennes dans le calcul du pgcd de F_{n+2} et F_{n+1} par l'algorithme d'Euclide.

3.c) On a donc $u_n=n$ et $v_n=2(F_{n+1}-1)$ car pour tous les entiers entre 2 et F_{n+1}, il y a deux restes de division euclidienne calculés. Comme $v_n\sim\dfrac{2}{\sqrt5}\varphi^n$ avec $\varphi>1$, $\boxed{u_n=\mathrm{o}(v_n).}$

4.

```python
def fibo(n):
    a, b = 0, 1
    for i in range(n):
        # ici, a = F_i et b = F_(i+1)
        a, b = b, a + b
    return a
```

5. En utilisant l'associativité du pgcd,

```python
def gcd_trois(a, b, c):
    "renvoie pgcd(a, b, c)"
    return euclide(euclide(a, b), c)
```

IV. Le Théorème de Lamé : nombre d'étapes de l'algorithme d'Euclide

1. La suite des restes $(r_k)_{k\geqslant0}$ est suite d'entiers naturels strictement décroissante, donc elle est finie.

2. On a $r_{n-1}=(a\wedge b)\cdot q_{n+1}+0$, $r_{n-1}>r_n=a\wedge b>0$ donc $q_{n+1}>1$ soit $\boxed{q_{n+1}\geqslant 2}$ car c'est un entier.

$\boxed{r_n=a\wedge b\geqslant 1=F_2}$ et $\boxed{r_{n-1}\geqslant F_3=2}$ car sinon $r_{n-1}=1$ est le dernier reste non nul.

3. q_k est défini pour $k\geqslant 2$, et si $k\in[\![2,n]\!]$, $r_k>r_{k-1}>r_{k-2}$ (par divisions euclidiennes si $k>2$, et car $a>b$ si $k=2$). Donc $r_{k-1}q_k=r_{k-2}-r_k>0$ et comme $r_{k-1}\geqslant 0$, $q_k>0$. Comme il s'agit d'un entier, $\boxed{q_k\geqslant 1}$.

On montre ensuite par récurrence (finie) d'ordre 2 que $\boxed{\forall\,k\in[\![2,n+2]\!],\quad r_{n+2-k}\geqslant F_k.}$

- C'est vrai si $k=2$ ou 3 d'après la question précédente.

- Si, pour un $k \in [\![3, n+1]\!]$, c'est vrai aux rangs k et $k-1$, $r_{n+2-(k+1)} = r_{n-k+1} = r_{n-k+2} \cdot q_{n-k+3} + r_{n-k+3}$ avec $q_{n-k+3} \geqslant 1$ d'après la question précédente. Donc, comme tout est positif, et par hypothèse de récurrence, $r_{n+2-(k+1)} \geqslant r_{n-k+2} + r_{n-k+3} \geqslant F_k + F_{k-1} = F_{k+1}$ ce qui établit la récurrence.

---

4. Si l'algorithme d'Euclide pour $a > b$ s'effectue avec n divisions (les membres de gauche sont $r_0, r_1, \ldots, r_{n-1}$ et $r_{n+1} = 0$) alors $r_n = a \wedge b$ et d'après la question précédente, $\boxed{a = r_0 = r_{n+2-(n+2)} \geqslant F_{n+2} \text{ et } b = r_1 = r_{n+2-(n+1)} \geqslant F_{n+1}.}$

---

5. On a alors $b \geqslant F_{n+1} \geqslant \varphi^{n-1}$ d'après la partie I. Donc $(n-1)\ln\varphi \leqslant \ln b$. Et comme n est entier, (et $\varphi > 1$), $\boxed{n \leqslant 1 + \left\lfloor \frac{\ln b}{\ln \varphi} \right\rfloor.}$

---

6. On déduit de la question précédente que, si b est le plus petit des deux, $n \leqslant 1 + \left\lfloor \log_{10} b \cdot \frac{\ln 10}{\ln \varphi} \right\rfloor \leqslant 1 + 5\lfloor \log_{10} b \rfloor$ par croissance de la fonction partie entière. Or le nombre de chiffres de b est $N = \lfloor \log_{10} b \rfloor + 1$. Donc $\boxed{n \leqslant 5N.}$

Fin