

Première partie : une formule de Legendre

1. Compter les multiples de p^k compris entre 1 et n , c'est compter les $\ell \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leq p^k \ell \leq n$ ce qui équivaut à $1 \leq \ell \leq \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$. Il y a donc exactement $\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$ multiples de p^k compris entre 1 et n .

2. Or p étant un nombre premier, et donc non « sécable » (ou encore s'il divise un produit alors il divise l'un des termes), compter les apparitions de p dans la décomposition primaire de $n! = 1 \times 2 \times \dots \times n$ revient à

- compter les multiples de p entre 1 et n , qui apportent chacun un facteur p ,
- puis compter les multiples de p^2 entre 1 et n , qui apportent chacun un facteur p de plus,
- puis compter les multiples de p^3 entre 1 et n , qui apportent chacun un facteur p de plus,
- etc.

Vu le résultat de la question précédente, on en déduit que $v_p(n!) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$.

Autre rédaction possible : on peut dénombrer les entiers entre 1 et n ayant une valuation p -adique exactement égale à $k \in \mathbb{N}$: il s'agit des multiples de p^k qui ne sont pas multiples de p^{k+1} et qui sont au nombre de $\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{p^{k+1}} \right\rfloor$, d'où la formule (les sommes étant toujours faussement infinies)

$$v_p(n!) = \sum_{k=0}^{+\infty} k \cdot \left(\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{n}{p^{k+1}} \right\rfloor \right) = \sum_{k=1}^{+\infty} k \cdot \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor - \sum_{k=1}^{+\infty} (k-1) \cdot \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor = \sum_{k=1}^{+\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor.$$

Cette somme est bien finie car $\frac{n}{p^k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} 0$. Donc l'entier $\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$ finit par être nul, dès que $\frac{n}{p^k} < 1$ soit $n < p^k$ c'est-à-dire $k > \frac{\ln n}{\ln p}$.

Donc l'indice du dernier terme non nul est $k = \left\lfloor \frac{\ln n}{\ln p} \right\rfloor$.

Deuxième partie : une inégalité de Tchebychev

3.a) On a $\binom{2m+1}{m} = \binom{2m+1}{2m+1-m} = \binom{2m+1}{m+1}$ et d'après la formule du binôme de Newton,

$$2^{2m+1} = (1+1)^{2m+1} = \sum_{k=0}^{2m+1} \binom{2m+1}{k} \geq \binom{2m+1}{m} + \binom{2m+1}{m+1} = 2 \binom{2m+1}{m}$$

donc $\binom{2m+1}{m} \leq 2^{2m} = 4^m$.

3.b) Si p est un nombre premier tel que $p \in \llbracket m+2, 2m+1 \rrbracket$, comme $(2m+1)! = \binom{2m+1}{m} m!(m+1)!$ est divisible par p , mais pas $m!(m-1)!$ vu que $m+2 \leq p \leq 2m+1$, p divise $\binom{2m+1}{m}$ (soit en utilisant la décomposition primaire, soit avec le lemme de Gauß comme $p \wedge (m!(m+1)!) = 1$.)

Alors $\prod_{m+2 \leq p \leq 2m+1} p \leq \binom{2m+1}{m} \leq 4^m$ d'après la question précédente.

4. On montre par récurrence forte sur $n \geq 2$ que $\prod_{p \leq n} p \leq 4^{n-1}$.

Initialisation On a bien $2 \leq 2$ pour $n = 2$.

Hérédité Si l'inégalité est vraie jusqu'au rang $n-1$, pour un $n \geq 3$,

▪ Soit n est pair et donc non premier et $\prod_{p \leq n} p = \prod_{p \leq n-1} p \leq 4^{n-2} \leq 4^{n-1}$ par hypothèse de récurrence.

▪ Soit n est impair et s'écrit donc $n = 2m + 1$ avec $m \in \mathbb{N}^*$.

Alors $\prod_{p \leq n} p = \prod_{p \leq 2m+1} p = \prod_{p \leq m+1} p \prod_{m+2 \leq p \leq 2m+1} p \leq 4^m \cdot 4^m = 4^{2m} = 4^{n-1}$ par hypothèse de récurrence et question précédente.

5. Si $x \geq 2$, alors $\prod_{p \leq x} p = \prod_{p \leq [x]} p \leq 4^{\lfloor x \rfloor - 1} \leq 4^x - 1$ d'après la question précédente. Donc $\prod_{p \leq x} p \leq 4^{x-1}$.

Troisième partie : un lemme technique

6.a) Si $x \in \mathbb{R}_+^*$, $2x - 1 < [2x] \leq 2x$ et $x - 1 < [x] \leq x$ donc $-2x \leq -2[x] \leq 2 - 2x$.

On a donc $-1 < [2x] - 2[x] < 2$ et comme ce sont des entiers, $[2x] - 2[x] \in \{0, 1\}$.

6.b) Soit p un diviseur premier de $\binom{2n}{n}$. Comme $(2n)! = \binom{2n}{n} n!$, p divise aussi $(2n)!$, et donc un des termes du produit car c'est un nombre premier. Ainsi $p \in [2, 2n]$.

6.c) Comme $(2n)! = \binom{2n}{n} n!$, avec les propriétés connues des valuations p -adiques, $v_p((2n)!) = m_p + 2v_p(n!)$ donc $m_p = v_p((2n)!) - 2v_p(n!) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \right)$ d'après la formule de Legendre. Le premier terme devient nul dès que $n > N = \left\lfloor \frac{\ln(2n)}{\ln p} \right\rfloor$ et le deuxième s'annule pour $n > \left\lfloor \frac{\ln(n)}{\ln p} \right\rfloor$ et donc a fortiori pour $n > N$. Finalement, on a bien $m_p = \sum_{k=1}^N \left(\left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \right)$.

6.d) Soit p est un nombre premier vérifiant $\sqrt{2n} < p \leq 2n$. Alors $p^2 > 2n$ et pour tout $k \geq 2$, $p^k > 2n$ donc $\frac{n}{p^k} \leq \frac{2n}{p^k} < 1$ donc $\left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor = 0$. Ainsi $m_p = \left\lfloor \frac{2n}{p} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor$ donc $m_p \in \{0, 1\}$ d'après a.

6.e) Si p est un nombre premier vérifiant $\frac{2}{3}n < p \leq n$, alors

▪ $1 \leq \frac{n}{p} < \frac{3}{2}$ et $2 \leq \frac{2n}{p} < 3$ donc $\left\lfloor \frac{2n}{p} \right\rfloor - 2 \left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor = 2 - 2 = 0$,

▪ si $k \geq 2$, $\frac{n}{p^k} \leq \frac{2n}{p^k} < \frac{3}{p^{k-1}} \leq 1$ car $p > \frac{2}{3}n > 2$ donc $p^{k-1} \geq p \geq 3$. Donc $\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2n}{p^k} \right\rfloor = 0$.

Ainsi, tous les termes de somme définissant m_p sont nuls et $m_p = 0$.

6.f) On a, vu les questions a. et c., $m_p \leq N = \left\lfloor \frac{\ln(2n)}{\ln p} \right\rfloor \leq \frac{\ln(2n)}{\ln p}$ donc $\ln p^{m_p} \leq \ln(2n)$ donc $p^{m_p} \leq 2n$.

6.g) La décomposition primaire et la question b. donnent

$$\binom{2n}{n} = \prod_{2 \leq p \leq 2n} p^{m_p} = \prod_{2 \leq p \leq \sqrt{2n}} p^{m_p} \prod_{\sqrt{2n} < p \leq \frac{2}{3}n} p^{m_p} \prod_{\frac{2}{3}n < p \leq n} p^{m_p} \prod_{n < p \leq 2n} p^{m_p}.$$

Or,

- d'après e., $\prod_{\frac{2}{3}n < p \leq n} p^{m_p} = 1,$
- d'après d., $\prod_{\sqrt{2n} < p \leq \frac{2}{3}n} p^{m_p} \prod_{n < p \leq 2n} p^{m_p} \leq \prod_{\sqrt{2n} < p \leq \frac{2}{3}n} p \prod_{n < p \leq 2n} p$
- d'après f., $\prod_{2 \leq p \leq \sqrt{2n}} p^{m_p} \leq \prod_{2 \leq p \leq \sqrt{2n}} 2n = \prod_{2 \leq p \leq \lfloor \sqrt{2n} \rfloor} 2n \leq (2n)^{\lfloor \sqrt{2n} \rfloor + 1} \leq (2n)^{\sqrt{2n} + 1}.$

Finalement,
$$\binom{2n}{n} \leq (2n)^{\sqrt{2n} - 1} \prod_{\sqrt{2n} < p \leq \frac{2}{3}n} p \prod_{n < p \leq 2n} p.$$

7. On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que
$$\binom{2n}{n} \geq \frac{4^n}{2n}.$$

Initialisation On a bien $\binom{2}{1} = 2 \geq 2$ pour $n = 1$.

Hérédité Si pour un $n \geq 1$, $\binom{2n}{n} \geq \frac{4^n}{2n}$, alors

$$\binom{2n+2}{n+1} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!^2} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)^2} \binom{2n}{n} \underset{\text{HR}}{\geq} \frac{4^n(2n+1)}{n(n+1)} \geq \frac{4^n \cdot 2n}{n(n+1)} = \frac{4^{n+1}}{2(n+1)}$$

ce qui établit la récurrence.

On peut aussi démontrer ce résultat sans récurrence : on vérifie par un simple calcul que si $1 \leq k \leq n$, $\binom{2n}{k-1} < \binom{2n}{k}$ et par la symétrie $\binom{2n}{k} = \binom{2n}{2n-k}$, on en déduit que $\binom{2n}{n}$ est le plus grand des $\binom{2n}{k}$ pour $k \in \llbracket 0, 2n \rrbracket$.

Alors $4^n = 2^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} = 2 + \sum_{k=1}^{2n-1} \binom{2n}{k} \leq 2 + (2n-1) \binom{2n}{n} \underset{n > 0}{\leq} \binom{2n}{n} + (2n-1) \binom{2n}{n} = 2n \binom{2n}{n}$ ce qui redonne bien
$$\binom{2n}{n} \geq \frac{4^n}{2n}.$$

8. Finalement,
$$4^n \leq 2n \binom{2n}{n} \leq (2n)^{\sqrt{2n}} \prod_{\sqrt{2n} < p \leq \frac{2}{3}n} p \prod_{n < p \leq 2n} p$$
 d'après les deux précédentes questions, et on

obtient le résultat attendu.

Quatrième partie : le postulat de Bertrand

9. On remarque que chacun des nombres premiers donnés est entre le précédent et son double (ce qui montre que le postulat est vrai pour tous ces nombres premiers, sauf le dernier).

Appelons p_1, \dots, p_{11} ces nombres premiers. Pour tout $2 \leq n \leq 630$, on a i tel que $p_i \leq n < p_{i+1}$. Alors $p_{i+1} \leq 2p_i \leq 2n$ et p_{i+1} est bien dans l'intervalle $]n, 2n]$.

Comme le postulat est également vrai pour $n = 1$, il l'est pour tout n tel que $1 \leq n \leq 630$.

10.a) D'après la partie précédente et en utilisant l'inégalité de Tchebychev, comme $n \geq 3$,

$$4^n \leq (2n)^{\sqrt{2n}} \prod_{\sqrt{2n} < p \leq \frac{2}{3}n} p \cdot P_n \leq (2n)^{\sqrt{2n}} \prod_{p \leq \frac{2}{3}n} p \cdot P_n \leq (2n)^{\sqrt{2n}} \cdot 4^{\frac{2}{3}n-1} \cdot P_n \leq (2n)^{\sqrt{2n}} \cdot 4^{\frac{2}{3}n} \cdot P_n$$

d'où on tire $P_n \geq \frac{4^{\frac{n}{3}}}{(2n)^{\sqrt{2n}}}$.

10.b) Soit $f : x \mapsto \frac{6 \ln x}{x}$.

D'après la question précédente, $\ln P_n \geq \frac{2n}{3} \ln 2 - 2\sqrt{2n} \ln \sqrt{2n}$.

Donc $\ln P_n \geq \frac{2n}{3} (\ln 2 - f(\sqrt{2n}))$. Comme de plus $2^5 = 32 > 30$, $30 \ln 2 > 6 \ln 30$ donc $\ln 2 > f(30)$.

Ainsi, $\ln P_n \geq \frac{2n}{3} (\ln 2 - f(\sqrt{2n})) > \frac{2n}{3} (f(30) - f(\sqrt{2n}))$.

10.c) f est dérivable sur \mathbb{R}_+^* et $f' : x \mapsto 6 \frac{1 - \ln x}{x^2}$.

Donc f croît sur $]0, e]$ et décroît sur $[e, +\infty[$.

10.d) Comme de plus $n \geq 450$, $\sqrt{2n} \geq 30 \geq e$ et $f(30) \geq f(\sqrt{2n})$ d'après la question précédente.

La minoration de la question 10.b donne alors $\ln P_n > 0$ donc $P_n > 1$ donc il existe un nombre premier p tel que $n < p \leq 2n$.

Le postulat de Bertrand est vrai pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Fin