Développements limités et asymptotiques

- Lorsque l'on demande un DL :
  - La première chose à faire est de se ramener au voisinage de 0 en posant $h = x - a$ ou $h = \frac{1}{x}$. Et, bien sûr, connaître PARFAITEMENT les développements limités usuels (il y a des moyens mnémotechniques (ou logiques) pour les retenir !).
  - Ensuite, voir si des propriétés de parité peuvent simplifier les calculs.
  - Il est souvent difficile de savoir à quel ordre on doit développer chaque terme : prendre le temps d'y réfléchir, et se dire que plus on développe loin, plus on a des chances de faire des erreurs de calcul.
  - Attention à aller assez loin dans le développement d'une composée pour ne pas oublier de terme non négligé.
  - Lorsque l'on a un quotient, on fait en général apparaître du $\dfrac{1}{1\pm u}$.
  - TOUJOURS mettre les termes d'un DL par ordre croissant de négligeabilité. Cela évite bien des erreurs.
- L'une des principales applications des DL est la recherche d'équivalent (et donc de limite). C'est facile, c'est le terme le plus fort (le premier) qui est l'équivalent le plus simple.
- L'autre utilisation classique est celle en géométrie, cela simplifie beaucoup les calculs d'asymptote (et de position de la courbe par rapport à celle-ci).
- Les développements asymptotiques sont en général difficiles. On retiendra que si on note f_k le k^e terme, on a alors $f_{k+1} \sim f - f_1 - \cdots - f_k$.
- Si vous avez une calculatrice qui fait du calcul formel, elle sait calculer des développements limités. Sinon, demandez gentiment à `https://www.wolframalpha.com/` ou allez sur `http://www.xcasenligne.fr` et utiliser l'instruction `eries(f(x),x=a,n) eries(f(x),x=a,n) pour obtenir un` $\mathrm{DL}_n(a)$ `de` f `pour vérifier vos calculs.`

Développements limités et applications

1 Déterminer les développements limités

1. $\mathrm{DL}_2(0)$ de $\sqrt{1+\sqrt{1+x}}$
2. $\mathrm{DL}_3\left(\frac{\pi}{4}\right)$ de $\sin x$
3. $\mathrm{DL}_4(1)$ de $\dfrac{\ln x}{x^2}$
4. $\mathrm{DL}_3(0)$ de $(1+x)^{\frac{1}{x}}$
5. $\mathrm{DL}_3(0)$ de $\sqrt{1+\sin x}$
6. $\mathrm{DL}_3(0)$ de $(1+\sin x)^{\frac{1}{x}}$
7. $\mathrm{DL}_4(0)$ de $\dfrac{x}{e^x-1}$
8. $\mathrm{DL}_4(0)$ de $\dfrac{x}{\tan x}$
9. $\mathrm{DL}_{10}(0)$ de $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}}$
10. $\mathrm{DL}_4(0)$ de $(1+x+x^2)^{\frac{1}{x}}$
11. $\mathrm{DL}_4(0)$ de
$$\ln(1+x+\sqrt{1+x})$$
12. $\mathrm{DL}_4(0)$ de $\ln\dfrac{\ln(1+x)}{x}$
13. $\mathrm{DL}_4(0)$ de $(\cos x)^{1+\sin x}$
14. $\mathrm{DL}_4(0)$ de $\sqrt{1+\tan x}$
15. $\mathrm{DL}_5(0)$ de $\dfrac{x}{\sin x}$
16. $\mathrm{DL}_6(0)$ de $\operatorname{ch} x \sin x$
17. $\mathrm{DL}_3(1)$ de $\sqrt{x}$
18. $\mathrm{DL}_2(0)$ de $\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{\cos x - 1}}$
19. $\mathrm{DL}_{1000}(0)$ de $\ln\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{999} \frac{x^k}{k!}\right)$

2 Déterminer un équivalent simple en 0 de

1. $\sqrt{\sin x} - \sqrt{\operatorname{sh} x}$
2. $\dfrac{\sin x + \operatorname{sh} x - 2x}{x(\cos x + \operatorname{ch} x - 2)}$
3. $\sin x + a\tan x + b\sin^3 x$ où a, b réels

3 Montrer que l'application $f : \begin{vmatrix} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & xe^{x^2} \end{vmatrix}$ admet une application réciproque définie sur $\mathbb{R}$ et en donner un $\mathrm{DL}_5(0)$.

4 Déterminer le DL_6 en $+\infty$ de $\ln\left(x\tan\left(\dfrac{1}{x}\right)\right)$.

5 Étudier les limites

1. $\dfrac{\cos x - \sqrt{\cos x}}{x^2}$ en 0
2. $\dfrac{\ln x}{x^2+x-2}$ en 1
3. $x^{\frac{1}{1-x}}$ en 1
4. $(\pi - 2x)\tan x$ en $\dfrac{\pi}{2}$
5. $\dfrac{(1+\sin x)^{\frac{1}{x}} - e^{1-\frac{x}{2}}}{(1+\tan x)^{\frac{1}{x}} - e^{\cos\sqrt{x}}}$ en 0

6 Étudier les fonctions (limites, tangentes, position de la courbe aux points particuliers, branches infinies)

1. $x \mapsto (x+1)e^{x/(x+1)}$
2. $x \mapsto x^x$
3. $x \mapsto |x|^{\alpha} e^{-1/\sqrt{x}}$, $\alpha \in \mathbb{R}$
4. $x \mapsto |x|^{1/(x-1)}$
5. $x \mapsto xe^{2x/(x^2-1)}$
6. $x \mapsto \ln(x - \ln x)$

7 **CCINP 1**

1. On considère deux suites numériques $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est non nulle à partir d'un certain rang et $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$.
   Démontrer que u_n et v_n sont de même signe à partir d'un certain rang.
2. Déterminer le signe, au voisinage de l'infini, de $u_n = \operatorname{sh}\left(\dfrac{1}{n}\right) - \tan\left(\dfrac{1}{n}\right)$.

Développements asymptotiques

8 Former le développement asymptotique de

1. $\dfrac{\ln(1+x)}{\sqrt{x}}$ en 0 à la précision $x^{5/2}$
2. x^x à la précision $(x\ln x)^2$.
3. $\sqrt{x+1}$ en $+\infty$ à la précision $\dfrac{1}{x^{3/2}}$
4. $x\ln(x+1) - (x+1)\ln x$ en $+\infty$ à la précision $\dfrac{1}{x^2}$

9 Soit $f : [e, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $[e, +\infty[$ sur un intervalle à déterminer.
2. Donner un développement asymptotique à trois termes de f^{-1} en $+\infty$.

10 Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, l'équation $x + e^x = n$ admet une solution unique x_n. Former un développement asymptotique à la précision $\dfrac{\ln^2 n}{n^2}$ de x_n quand n tend vers l'infini.

11 Soit $n \in \mathbb{N}$ et (E_n) l'équation $x + \ln x = n$ d'inconnue $x \in \mathbb{R}_*^+$.

1. Montrer que l'équation (E_n) admet une solution unique notée x_n.
2. Montrer que la suite (x_n) diverge vers $+\infty$.
3. ✦ Déterminer un développement asymptotique de x_n sous la forme $x_n = u_n + v_n + o(1)$.