

# Espaces vectoriels

Dans tout le chapitre,  $\mathbb{K}$  désigne un corps commutatif ( $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  au programme).

## STRUCTURE D'ESPACE VECTORIEL

### 1 Définition

#### Définition 1 : Loi de composition externe

Soit  $E$  un ensemble et  $\mathbb{K}$  un corps. On appelle **loi de composition externe** sur  $E$  toute application

$$\begin{array}{l} \mathbb{K} \times E \longrightarrow E \\ \vdots \\ (\lambda, x) \longmapsto \lambda \cdot x \end{array}$$

#### Définition 2 : $\mathbb{K}$ -espace vectoriel

On appelle **espace vectoriel sur  $\mathbb{K}$**  ou  **$\mathbb{K}$ -espace vectoriel** tout triplet  $(E, +, \cdot)$  tel que

- $E$  est un ensemble,  $+$  est une loi de composition interne sur  $E$  et  $\cdot$  est une loi de composition externe sur  $E$ .
- $(E, +)$  est un groupe abélien d'élément neutre noté  $\vec{0}_E$ .
- **Pseudo-distributivité à droite :**

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall \vec{x} \in E, (\lambda + \mu) \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x} + \mu \cdot \vec{x}.$$

- **Pseudo-distributivité à gauche :**

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall \vec{x}, \vec{y} \in E, \lambda \cdot (\vec{x} + \vec{y}) = \lambda \cdot \vec{x} + \lambda \cdot \vec{y}.$$

- **Pseudo-associativité :**

$$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{K}, \forall \vec{x} \in E, (\lambda \times \mu) \cdot \vec{x} = \lambda \cdot (\mu \cdot \vec{x}).$$

- **Pseudo-élément neutre :**  $\forall \vec{x} \in E, 1_{\mathbb{K}} \cdot \vec{x} = \vec{x}$ .

#### Définition 3 : Famille presque nulle, combinaison linéaire

On appelle **famille presque nulle** de scalaire toute famille  $(\lambda_i)_{i \in I}$  telle que  $\lambda_i \neq 0$  pour un nombre fini de vecteurs seulement. On note  $\mathbb{K}^{(I)}$  l'ensemble des familles de scalaires presque nulles.

Si  $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$  sont des vecteurs de  $E$ , on appelle **combinaison linéaire** de  $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n$ , tout vecteur de la forme  $\lambda_1 \vec{x}_1 + \dots + \lambda_n \vec{x}_n$  où  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ .

La définition s'étend aux familles infinies de vecteurs en n'ayant qu'un nombre fini de scalaires non nuls : toute combinaison linéaire est nécessairement finie (d'où l'intérêt des familles presque nulles de scalaires).

Si  $\mathcal{F} = (\vec{x}_i)_{i \in I}$ , les combinaisons linéaires d'éléments de  $\mathcal{F}$  sont les  $\sum_{i \in I} \lambda_i \vec{x}_i$  où  $(\lambda_i)_{i \in I} \in \mathbb{K}^{(I)}$ .

#### Propriété 1 : Stabilité par combinaison linéaire

*Un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel est stable par combinaisons linéaires : toute combinaison linéaire de vecteurs d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$  est encore dans  $E$ .*

#### Propriété 2 : Produit cartésien de $\mathbb{K}$ -ev

*Si  $(E_1, +, \cdot)_{(1)}$ ,  $\dots$ ,  $(E_n, +, \cdot)_{(n)}$  sont des  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels alors  $(E_1 \times \dots \times E_n, +, \cdot)$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, avec les lois coordonnées à coordonnées : si  $\lambda \in \mathbb{K}$  et  $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n), (\vec{x}'_1, \dots, \vec{x}'_n) \in E_1 \times \dots \times E_n$ ,*

$$(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) + (\vec{x}'_1, \dots, \vec{x}'_n) = \left( \vec{x}_1 + \dots + \vec{x}'_1, \dots, \vec{x}_n + \dots + \vec{x}'_n \right)$$

$$\lambda \cdot (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) = \left( \lambda \cdot \vec{x}_1, \dots, \lambda \cdot \vec{x}_n \right)$$

#### Propriété 3 : Fonctions à valeurs dans un $\mathbb{K}$ -ev

*Si  $X$  est un ensemble non vide et  $(F, +, \cdot)_{(F)}$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, alors  $(F^X, +, \cdot)$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel avec les lois habituelles sur les fonctions : si  $\lambda \in \mathbb{K}$  et  $f, g \in F^X$ , alors*

$$f + g : x \mapsto f(x) +_F g(x)$$

$$\lambda \cdot f : x \mapsto \lambda \cdot_F f(x)$$

#### Propriété 4 : Espaces vectoriels classiques

*Sont des  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels :*

- $(\mathbb{K}, +, \times)$ ,
- $(\mathbb{K}^n, +, \cdot)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,
- $(\mathbb{K}^{\mathbb{N}}, +, \cdot)$ ,
- $(\mathbb{K}^X, +, \cdot)$  pour tout ensemble  $X$ ,
- $(\mathbb{K}[X], +, \cdot)$ ,
- $(\mathbb{K}(X), +, \cdot)$ .



$(\mathbb{C}, +, \times)$  est un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel, et, plus généralement, si  $\mathbb{K}$  est un sous-corps de  $\mathbb{L}$ , alors  $(\mathbb{L}, +, \times)$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

## 2 Premières propriétés

### Propriété 5

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel,  $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$  et  $\vec{x}, \vec{y} \in E$ .

- (i)  $\lambda \cdot (\vec{x} - \vec{y}) = \lambda \cdot \vec{x} - \lambda \cdot \vec{y}$ .
- (ii)  $\lambda \cdot \vec{0}_E = \vec{0}_E$ .
- (iii)  $(\lambda - \mu) \cdot \vec{x} = \lambda \cdot \vec{x} - \mu \cdot \vec{x}$ .
- (iv)  $0_{\mathbb{K}} \cdot \vec{x} = \vec{0}_E$ .
- (v)  $\lambda \cdot (-\vec{x}) = -\lambda \cdot \vec{x} = (-\lambda) \cdot \vec{x}$ .
- (vi)  $\lambda \cdot \vec{x} = \vec{0}_E \iff \lambda = 0_{\mathbb{K}} \text{ ou } \vec{x} = \vec{0}_E$ .

## 3 Sous-espace vectoriel

### Définition 4 : Sous-espace vectoriel

Soit  $(E, +, \cdot)$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $F$  une partie de  $E$ .

On dit que  $(F, +, \cdot)$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  lorsque  $(F, +|_{F^2}, \cdot|_{\mathbb{K} \times F})$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

### Propriété 6 : Caractérisation des sous-espaces vectoriels

$F$  est un sous-espace vectoriel de  $E$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} F \subset E \\ F \neq \emptyset \ (\vec{0}_E \in F) \\ \forall \vec{x}, \vec{y} \in F, \vec{x} + \vec{y} \in F \\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall \vec{x} \in F, \lambda \vec{x} \in F \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} F \subset E \\ F \neq \emptyset \ (\vec{0}_E \in F) \\ \forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall \vec{x}, \vec{y} \in F, \vec{x} + \lambda \vec{y} \in F \\ (F \text{ stable par combinaisons linéaires}) \end{array} \right.$$

### Propriété 7 : Les sous-espaces vectoriels $\mathbb{K}_n[X]$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\mathbb{K}_n[X]$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathbb{K}[X]$ .

## 4 Intersection de sous-espace vectoriel

### Propriété 8 : Intersection de sous-espaces vectoriels

Soit  $(F_i)_{i \in I}$  une famille de sous-espaces vectoriels de  $E$ . Alors  $\bigcap_{i \in I} F_i$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

## 5 Sous-espaces vectoriel engendré par une partie

### Définition 5 : Sous-espaces vectoriel engendré par une partie

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel,  $A \subset E$ .

On appelle **sous-espace vectoriel engendré** par  $A$  le plus petit sous-espace vectoriel de  $E$  contenant  $A$ .

On le note  $\text{Vect } A$  ou  $\text{Vect}_{\mathbb{K}} A$ .

Si  $F = \text{Vect } A$ , on dit que  $A$  **engendre**  $F$  ou que  $F$  est une **partie génératrice** de  $F$ .

### Propriété 9 : Caractérisation d'un Vect

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel,  $A \subset E$ .

(i)  $\text{Vect } A = \bigcap_{\substack{F \text{ sev de } E \\ A \subset F}} F$ .

(ii)  $\text{Vect } A$  est l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de  $A$  :

$$\text{Vect } A = \{ \lambda_1 \vec{x}_1 + \dots + \lambda_n \vec{x}_n ; n \in \mathbb{N}^*, \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n \in A, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K} \}.$$

(iii) Si  $A = \{ \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p \}$  est finie,

$$\text{Vect} \{ \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p \} = \text{Vect} ( \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p ) = \left\{ \sum_{i=1}^p \lambda_i \vec{x}_i ; (\lambda_1, \dots, \lambda_p) \in \mathbb{K}^p \right\}.$$

C'est cette dernière écriture qui est la plus utile dans la pratique.

 **Méthode : Passer de famille génératrice à équations**

On résout le système donné par le paramétrage traduisant le caractère générateur de la famille en égalant les coordonnées : il y a plus d'équations que d'inconnues.

Les premières servent à déterminer les paramètres du système, les autres formes des équations de notre sous-espace après élimination des paramètres.

 **Méthode : Passer d'équations à famille génératrice**

Pour passer d'un système d'équations décrivant un sous-espace vectoriel à une famille génératrice de celui-ci, on résout le système formé par les équations : certaines coordonnées vont alors s'exprimer en fonction d'autres qui vont devenir des paramètres et donner une famille génératrice.

**Propriété 10**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel,  $F$  sous-espace vectoriel de  $E$ ,  $A, B \in \mathcal{P}(E)$ .

- (i)  $\text{Vect } A \subset F \iff A \subset F \iff \forall \vec{x} \in A, \vec{x} \in F$ .
- (ii)  $\text{Vect } A = A \iff A$  sous-espace vectoriel de  $E$ .
- (iii) Si  $A \subset B$ , alors  $\text{Vect } A \subset \text{Vect } B$ .

 **Méthode : Égalité de Vect**

Pour montrer que  $\text{Vect } A = \text{Vect } B$ , on montre que

$$A \subset \text{Vect } B$$

puis que

$$B \subset \text{Vect } A.$$

**6 Familles de vecteurs**

**Définition 6 : Familles liées, libres, génératrices, bases**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel,  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\mathcal{F} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \in E^n$ .

- La famille  $\mathcal{F}$  est dite **liée** (ses vecteurs sont dit **linéairement dépendants**) lorsqu'il existe une combinaison linéaire non triviale de ses vecteurs égale au vecteur nul :

$$\exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n \setminus \{(0, \dots, 0)\}, \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{x}_i = \vec{0}_E$$

- La famille  $\mathcal{F}$  est dite **libre** (ses vecteurs sont dit **linéairement indépendants**) lorsqu'elle n'est pas liée, c'est-à-dire que toute combinaison linéaire de ses vecteurs égale au vecteur nul est triviale :

$$\forall (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{x}_i = \vec{0}_E \implies \forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \lambda_i = 0.$$

- La famille  $\mathcal{F}$  est dite **génératrice** de  $E$  (ou **engendre**  $E$ ) lorsque tout vecteur de  $E$  est combinaison linéaire de ces vecteurs :

$$\forall \vec{x} \in E, \exists (\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \vec{x} = \sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{x}_i$$

c'est-à-dire  $E = \text{Vect } \mathcal{F}$ .

- La famille  $\mathcal{F}$  est une **base** de  $E$  lorsqu'elle est libre et génératrice dans  $E$ .

Toutes ces définitions s'étendent aux familles infinies, les combinaisons linéaires restant toujours finies (les suites de coefficients  $(\lambda_i)_i$  sont presque nulles).

**Propriété 11 : Famille de polynômes à degrés étagés**

Toute famille de polynômes **non nuls** et à **degrés étagés** (c'est-à-dire deux à deux distincts) est libre.

**Définition – Propriété 1 : Coordonnées dans une base**

$\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$  est une base de  $E$  si et seulement si

$$\forall \vec{x} \in E, \exists! (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n, \vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + \dots + x_n \vec{e}_n.$$

Le triplet  $(x_1, \dots, x_n)$  est appelé  $n$ -uplet des **coordonnées** de  $\vec{x}$  dans la base  $\mathcal{B}$ .

Cette définition s'étend au cas où  $\mathcal{B}$  est infinie, les famille des coordonnées étant presque nulles.

**Définition – Propriété 2 : Bases canonique de  $\mathbb{K}^n, \mathbb{K}[X]$  et  $\mathbb{K}_n[X]$**

On a appelle **bases canoniques** de  $\mathbb{K}^n, \mathbb{K}[X]$  et  $\mathbb{K}_n[X]$  les familles  $((0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0))_{1 \leq k \leq n}$ ,

$$(X^n)_{n \in \mathbb{N}}, \text{ et } (1, X, X^2, \dots, X^n).$$



**Propriété 12 : Sur-famille d'une famille liée, génératrice**

Toute sur-famille d'une famille liée ou génératrice l'est encore.

**Propriété 13 : Sous-famille d'une libre**

Toute sous-famille d'une famille libre l'est encore.

**Propriété 14 : Complétion d'une famille libre**

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel,  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \vec{y} \in E$ .

$$(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n, \vec{y}) \text{ libre} \iff \begin{cases} (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \text{ libre} \\ y \notin \text{Vect}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \end{cases}$$

**Propriété 15 : Caractérisation des familles liées**

Soit  $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \in E^n$  où  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.  
 Alors  $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$  liée si et seulement s'il existe  $i_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tel que  $\vec{x}_{i_0} \in \text{Vect}(\vec{x}_i)_{i \neq i_0}$ .  
 Lorsque c'est le cas, on a alors  $\text{Vect}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) = \text{Vect}(\vec{x}_i)_{i \neq i_0}$ .

## 7 Sommes de sous-espaces vectoriels

**Définition 7 : Sommes de sous-espaces vectoriels**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel,  $F, G$  des sous-espaces vectoriels de  $E$ . On note

$$F + G = \{ \vec{x}_F + \vec{x}_G \mid x_F \in F, x_G \in G \}.$$

Ainsi,

$$\vec{x} \in F + G \iff \exists (\vec{x}_F, \vec{x}_G) \in F \times G, \vec{x} = \vec{x}_F + \vec{x}_G.$$

Plus généralement, si  $F_1, \dots, F_n$  des sous-espaces vectoriels de  $E$ , on note

$$F_1 + \dots + F_n = \sum_{i=1}^n F_i = \{ \vec{x}_1 + \dots + \vec{x}_n \mid \forall i, \vec{x}_i \in F_i \}.$$

Ainsi,

$$\vec{x} \in \sum_{i=1}^n F_i \iff \exists (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \in F_1 \times \dots \times F_n, \vec{x} = \vec{x}_1 + \dots + \vec{x}_n.$$

**Propriété 16**

- (i) Une somme de sous-espaces vectoriels est un sous-espace vectoriel.
- (ii) Si  $A, B$  sont des parties de  $E$ , alors  $\text{Vect}(A \cup B) = \text{Vect} A + \text{Vect} B$ .
- (iii)  $\text{Vect}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) = \mathbb{K} \vec{x}_1 + \dots + \mathbb{K} \vec{x}_n$ .

## 8 Somme directe

**Définition 8 : Somme directe**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel,  $F, G$  des sous-espaces vectoriels de  $E$ .  
 On dit que  $F$  et  $G$  sont en **somme directe** lorsque pour tout  $\vec{x} \in F + G$ , l'écriture  $\vec{x} = \vec{x}_F + \vec{x}_G$  où  $x_F \in F$  et  $x_G \in G$  est unique.  
 On note alors  $F + G = F \oplus G$ .

**Propriété 17 : Caractérisation par l'unique écriture de  $\vec{0}_E$**

$F$  et  $G$  sont en somme directe si et seulement si  $\forall (\vec{x}_F, \vec{x}_G) \in F \times G$ ,  
 $\vec{x}_F + \vec{x}_G = \vec{0}_E \implies \vec{x}_F = \vec{x}_G = \vec{0}_E$ .

**Propriété 18 : Caractérisation par intersection**

Deux sous-espaces  $F$  et  $G$  sont en somme directe si et seulement si  $F \cap G = \{ \vec{0}_E \}$ .

## 9 Sous-espaces supplémentaires

**Définition 9 : Sous-espaces supplémentaires**

Soient  $F$  et  $G$  des sous-espaces vectoriels d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel  $E$ .  
 $F$  et  $G$  sont dits **supplémentaires** dans  $E$  si et seulement si  $E = F \oplus G$  c'est-à-dire  
 $\forall \vec{x} \in E, \exists ! (\vec{x}_F, \vec{x}_G) \in F \times G, \vec{x} = \vec{x}_F + \vec{x}_G$ .

**Propriété 19**

- (i)  $F$  et  $G$  sont supplémentaires dans  $E$  si et seulement si  $F + G = E$  et  $F \cap G = \{ \vec{0}_E \}$ .
- (ii) Il n'y a pas unicité du supplémentaire en général.

## II STRUCTURE D'ALGÈBRE

### Définition 10 : Structure d'algèbre

On dit que  $(\mathcal{A}, +, \cdot)$  est une  $\mathbb{K}$ -**algèbre** lorsque

- $(\mathcal{A}, +, \cdot)$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel,
- $(\mathcal{A}, +, \cdot)$  est un anneau,
- Pseudo-associativité :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \forall x, y \in \mathcal{A}, \lambda \cdot (x \times y) = (\lambda \cdot x) \times y = x \times (\lambda \cdot y).$$

### Propriété 21 : Taille des familles libres ou génératrices

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$ .

- Toute famille génératrice de  $E$  possède au moins  $n$  vecteurs.
- Toute famille libre de  $E$  possède au plus  $n$  vecteurs.
- Toute famille d'au moins  $n + 1$  vecteurs en dimension  $n$  est liée.

### Théorème 2 : Caractérisation des bases

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \neq 0$ ,  $\mathcal{B}$  une famille finie de vecteurs de  $E$ .

$\mathcal{B}$  est une base de  $E$  si et seulement si elle contient  $n = \dim E$  vecteurs et elle est libre ou génératrice.

### Théorème 3 : Théorème de la base incomplète

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \neq 0$ . On peut compléter toute famille libre de vecteurs de  $E$  en une base de  $E$ .

De plus, les vecteurs pour compléter peuvent être choisis dans n'importe quelle famille génératrice de  $E$ .

### Corollaire 1

Si  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \neq 0$ ,  $\mathcal{G}$  une famille génératrice de  $E$  et  $\mathcal{L}$  une sous-famille libre de  $\mathcal{G}$ .

Alors on peut trouver une base  $\mathcal{B}$  de  $E$  telle que  $\mathcal{L}$  extraite de  $\mathcal{B}$  extraite de  $\mathcal{G}$ .

## III DIMENSION FINIE

### 1 Espace de dimension finie

#### Définition 11 : Espace de dimension finie

Un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel est dit de **dimension finie** s'il possède une famille génératrice finie.

Dans le cas contraire, il est dit de **dimension infinie**.

### 2 Dimension, bases extraites et incomplètes

#### Théorème 1 : Théorème de la base extraite

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie,  $E \neq \{\vec{0}_E\}$ .

De toute famille génératrice de  $E$ , on peut extraire une base de  $E$ .

#### Propriété 20 : Existence de bases et leur taille

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie,  $E \neq \{\vec{0}_E\}$ .

- $E$  possède des bases.
- Toutes les bases de  $E$  ont même nombre d'éléments.

#### Définition 12 : Dimension

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie. Si  $E = \{\vec{0}_E\}$ , on pose  $\dim E = 0$ .

Sinon, on appelle **dimension** de  $E$ , notée  $\dim E$  (ou  $\dim_{\mathbb{K}} E$ ), le nombre de vecteurs de toute base de  $E$ .

### 3 Dimension d'un produit d'espaces vectoriels

#### Propriété 22 : Base et dimension d'un produit cartésien

Soient  $E, F$  des  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de bases  $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$  et  $\mathcal{B}' = (\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n)$ .

Alors  $\mathcal{C} = ((\vec{e}_1, \vec{0}_F), \dots, (\vec{e}_p, \vec{0}_F), (\vec{0}_E, \vec{f}_1), \dots, (\vec{0}_E, \vec{f}_n))$  est une base de  $E \times F$ .

En particulier,  $E \times F$  est de dimension finie et  $\dim E \times F = \dim E + \dim F$ .

Plus généralement, si  $E_1, \dots, E_n$  sont des espaces de dimension finie,  $E_1 \times \dots \times E_n$  l'est encore et  $\dim E_1 \times \dots \times E_n = \dim E_1 + \dots + \dim E_n$ .

Si  $E$  est de dimension finie,  $E^n$  l'est encore et  $\dim E^n = n \dim E$ .



## 4 Dimension des sous-espaces

### Propriété 23 : dimension des sous-espaces

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie,  $F$  un sous-espace de  $E$ .  
 Alors  $F$  est de dimension finie et  $\dim F \leq \dim E$  avec égalité si et seulement si  $F = E$ .  
 L'entier  $\dim E - \dim F$  est appelé **codimension** de  $F$  dans  $E$ .

### Définition 13 : Droites, plans, hyperplan

- Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.
- Un sous-espace de dimension 1 est une **droite vectorielle** de  $E$ ;
  - un sous-espace de dimension 2 est un **plan vectoriel** de  $E$ ;
  - si  $E$  est de dimension finie  $n$ , un sous-espace de codimension 1, donc de dimension  $n - 1$  est un **hyperplan** de  $E$ .

## 5 Rang d'une famille de vecteurs

### Définition 14 : Rang d'une famille de vecteurs

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel,  $\mathcal{F}$  une famille d'éléments de  $E$ .  
 On appelle **rang** de  $\mathcal{F}$  l'entier

$$\text{rg } \mathcal{F} = \dim(\text{Vect } \mathcal{F}).$$

### Propriété 24 : rang d'une sous-famille, caractérisation des familles libres

- Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel,  $\mathcal{F}$  une famille d'éléments de  $E$ .
- (i) Si  $\mathcal{F}'$  est une sous-famille de  $\mathcal{F}$ ,  $\text{rg } \mathcal{F}' \leq \text{rg } \mathcal{F}$ .
  - (ii) Si  $\mathcal{F}$  est finie,  $\mathcal{F}$  est libre si et seulement si elle contient  $\text{rg } \mathcal{F}$  vecteurs.

## 6 Somme directe et supplémentaire

### Propriété 25 : Caractérisation de la supplémentarité avec des bases

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel,  $F, G$  des sous-espaces de dimension finie,  $\mathcal{B}_F$  une base de  $F$ ,  $\mathcal{B}_G$  une base de  $G$ ,  $\mathcal{C}$  la famille obtenue en mettant bout à bout  $\mathcal{B}_F$  et  $\mathcal{B}_G$  (concaténation).  
 On a toujours que  $\mathcal{C}$  engendre  $H = F + G$ , et  $F$  et  $G$  sont en somme directe si et seulement si  $\mathcal{C}$  est libre donc une base de  $H$ .

On dit alors que la base  $\mathcal{C}$  de  $H$  est adaptée à la décomposition  $H = F \oplus G$ .  
 On a alors  $\dim(F \oplus G) = \dim F + \dim G$ .

### Corollaire 2

Soient  $F, G$  des sous-espaces vectoriels de  $E$  de dimension finie, alors  $F + G$  est de dimension finie et  $\dim(F + G) \leq \dim F + \dim G$  avec égalité si et seulement si la somme est directe.

### Corollaire 3 : Sous-espaces supplémentaires en dimension finie

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie,  $F, G$  des sous-espaces de  $E$ .  
 $F$  et  $G$  sont supplémentaires dans  $E$  (ie  $E = F \oplus G$ ) si et seulement si deux des trois propriétés suivantes sont vraies :

1.  $E = F + G$ .
2. La somme est directe ( $F \cap G = \{\vec{0}_E\}$ ).
3.  $\dim E = \dim F + \dim G$ .

### Corollaire 4 : Existence et dimension des supplémentaires

Tout sous-espaces vectoriel  $F$  d'un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $E$  admet un supplémentaire dans  $E$ .  
 De plus, si  $p = \dim F$  et  $n = \dim E$ , tout supplémentaire de  $F$  est de codimension  $p$ , c'est-à-dire de dimension  $n - p$ .

## 7 Formule de Grassmann

### Propriété 26 : Formule de Grassmann

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel et  $F, G$  des sous-espaces de dimension finie.

$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).$$