Programme de colle – MP2I

Polynômes

Reprise du programme précédent auquel s'ajoute

Extrait du programme officiel :

Contenus	Capacités & commentaires
g) Formule d'interpolation de Lagrange	
Si $x_1, \dots, x_n$ sont des éléments distincts de $\mathbb{K}$ et $y_1, \dots, y_n$ des éléments de $\mathbb{K}$, il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ tel que $P(x_i) = y_i$ pour tout i.	Expression de P. Description des polynômes Q tels que $Q(x_i) = y_i$ pour tout i.

Espaces vectoriels

Extrait du programme officiel :

Contenus	Capacités & commentaires
a) Espaces vectoriels	
Structure de $\mathbb{K}$-espace vectoriel. Produit d'un nombre fini de $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.	Espaces $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}[X]$, $\cancel{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})}$.
Espace vectoriel des fonctions d'un ensemble dans un espace vectoriel.	Espace $\mathbb{K}^\Omega$, cas particulier $\mathbb{K}^\mathbb{N}$.
Famille presque nulle (ou à support fini) de scalaires, combinaison linéaire d'une famille de vecteurs.	On commence par la notion de combinaison linéaire d'une famille finie de vecteurs.
b) Sous-espaces vectoriels	
Sous-espace vectoriel : définition, caractérisation.	Sous-espace nul. Droite vectorielle. Plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$. Sous-espace $\mathbb{K}_n[X]$ de $\mathbb{K}[X]$.
Intersection d'une famille de sous-espaces vectoriels.	Ensemble des solutions d'un système linéaire homogène.
Sous-espace vectoriel engendré par une partie A.	Notations $\mathrm{Vect}(A)$, $\mathrm{Vect}(x_i)_{i\in I}$. Tout sous-espace vectoriel contenant A contient $\mathrm{Vect}(A)$.
c) Familles de vecteurs	
Famille (partie) génératrice.	
Famille (partie) libre, liée.	Ajout d'un vecteur à une famille (partie) libre. Liberté d'une famille de polynômes à degrés distincts.
Base, coordonnées.	Bases canoniques de $\mathbb{K}^n$, $\cancel{\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})}$, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathbb{K}[X]$. Bases de polynômes à degrés échelonnés dans $\mathbb{K}[X]$ et $\mathbb{K}_n[X]$.

Pas de somme d'espaces vectoriels, de théorie de la dimension ni d'application linéaire pour le moment.

Semaine prochaine : Dimension finie, fractions rationnelles.

Questions de cours

Les questions de cours précédées d'une ★ ne sont pas exigibles cette semaine du groupe 2 ayant colle d'informatique.

(i) Théorème de la division euclidienne dans $\mathbb{K}[X]$.

(ii) Relations cœfficients racines (formules de Viète).

(iii) Irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$.

(iv) Polynômes de Tchebychev : existence, relation de récurrence, terme dominant, parité et racines.

(v) Définition d'une $\mathbb{K}$-espace vectoriel, caractérisation des sous-espaces vectoriels (énoncé seulement).
Définition et caractérisations d'un Vect (énoncés seulement).
Définition d'une famille (finie) libre, liée, génératrice, d'une base.

(vi) ★ Toute intersection de sous-espaces vectoriels en est un.
Une famille de polynômes non nuls à degrés étagés est libre.

(vii) ★ **CCINP 85 : Caractérisation de la multiplicité et application**

1. Soient $n \in \mathbb{N}^*$, $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $a \in \mathbb{R}$.
   (a) Donner sans démonstration, en utilisant la formule de Taylor, la décomposition de $P(X)$ dans la base $\left(1, X-a, (X-a)^2, \ldots, (X-a)^n\right)$.
   (b) Soit $m \in \mathbb{N}^*$. En déduire que :
   a est une racine de P d'ordre de multiplicité m si et seulement si $\tilde{P}^{(m)}(a) \neq 0$ et
   $$\forall k \in [\![0, m-1]\!],\ \tilde{P}^{(k)}(a) = 0.$$
2. Déterminer deux réels a et b pour que 1 soit racine double du polynôme $P = X^5 + aX^2 + bX$ et factoriser alors ce polynôme dans $\mathbb{R}[X]$.

(viii) **CCINP 87 : Interpolation de Lagrange**
Soient $x_0, x_1, \cdots, x_n$ $\quad n+1$ réels deux à deux distincts.

1. Montrer que si $y_0, y_1, \cdots, y_n$ sont $n+1$ réels quelconques, alors il existe un unique polynôme P vérifiant $\deg P \leqslant n$ et $\forall k \in [\![0, n]\!],\ \tilde{P}(x_k) = y_k$.
   Pour l'existence, on pourra, pour $i \in [\![0, n]\!]$, commencer par expliciter ce polynôme P, que l'on notera L_i, lorsque
   $$\forall k \in [\![0, n]\!], \quad y_k = \begin{cases} 0 \text{ si } k \neq i \\ 1 \text{ si } k = i \end{cases}$$
2. Prouver que $\forall p \in [\![0, n]\!]$, $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} x_i^p L_i = X^p$.