

Programme de colle – MP2I

Espaces vectoriels, dimension finie

Extrait du programme officiel :

A - Espaces vectoriels

Contenus	Capacités & commentaires
a) Espaces vectoriels	
Structure de \mathbb{K} -espace vectoriel. Produit d'un nombre fini de \mathbb{K} -espaces vectoriels. Espace vectoriel des fonctions d'un ensemble dans un espace vectoriel. Famille presque nulle (ou à support fini) de scalaires, combinaison linéaire d'une famille de vecteurs.	Espaces \mathbb{K}^n , $\mathbb{K}[X]$, $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Espace \mathbb{K}^Ω , cas particulier $\mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. On commence par la notion de combinaison linéaire d'une famille finie de vecteurs.
b) Sous-espaces vectoriels	
Sous-espace vectoriel : définition, caractérisation. Intersection d'une famille de sous-espaces vectoriels. Sous-espace vectoriel engendré par une partie A .	Sous-espace nul. Droite vectorielle. Plan vectoriel de \mathbb{R}^3 . Sous-espace $\mathbb{K}_n[X]$ de $\mathbb{K}[X]$. Ensemble des solutions d'un système linéaire homogène. Notations $\text{Vect}(A)$, $\text{Vect}(x_i)_{i \in I}$. Tout sous-espace vectoriel contenant A contient $\text{Vect}(A)$.
c) Familles de vecteurs	
Famille (partie) génératrice. Famille (partie) libre, liée. Base, coordonnées.	Ajout d'un vecteur à une famille (partie) libre. Liberté d'une famille de polynômes à degrés distincts. Bases canoniques de \mathbb{K}^n , $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\mathbb{K}_n[X]$, $\mathbb{K}[X]$. Bases de polynômes à degrés échelonnés dans $\mathbb{K}[X]$ et $\mathbb{K}_n[X]$.
d) Somme d'un nombre fini de sous-espaces	
Somme de deux sous-espaces. Somme directe de deux sous-espaces. Caractérisation par l'intersection. Sous-espaces supplémentaires.	La somme $F + G$ est directe si la décomposition de tout vecteur de $F + G$ comme somme d'un élément de F et d'un élément de G est unique. On incite les étudiants à se représenter des espaces supplémentaires par une figure en dimension 2 et 3.

B - Espaces de dimension finie

Contenus	Capacités & commentaires
a) Existence de bases	
Un espace vectoriel est dit de dimension finie s'il possède une famille génératrice finie. Si $(x_i)_{1 \leq i \leq n}$ engendre E et si $(x_i)_{i \in I}$ est libre pour une certaine partie I de $\{1, \dots, n\}$, alors il existe une partie J de $\{1, \dots, n\}$ contenant I pour laquelle $(x_j)_{j \in J}$ est une base de E .	Existence de bases en dimension finie. Théorèmes de la base extraite (de toute famille génératrice on peut extraire une base), de la base incomplète (toute famille libre peut être complétée en une base).
b) Dimension d'un espace de dimension finie	
Dans un espace engendré par n vecteurs, toute famille de $n+1$ vecteurs est liée. Dimension d'un espace de dimension finie.	Dimension de \mathbb{K}^n , de $\mathbb{K}_n[X]$, de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Dimension de l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1, de l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants, de l'espace des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants.

Dans un espace de dimension n , caractérisation des bases comme familles libres ou génératrices de n vecteurs.
 Dimension d'un produit fini d'espaces vectoriels de dimension finie.
 Rang d'une famille finie de vecteurs.

Notation $\text{rg}(x_1, \dots, x_n)$.

c) Sous-espaces et dimension

Dimension d'un sous-espace d'un espace de dimension finie, cas d'égalité.
 Dimension d'une somme de deux sous-espaces : formule de Grassmann.
 Tout sous-espace d'un espace de dimension finie possède un supplémentaire. Caractérisation dimensionnelle des couples de sous-espaces supplémentaires.
 Base adaptée à un sous-espace, à une décomposition en somme directe de deux sous-espaces.

**La notion de \mathbb{K} -algèbre a été introduite.
 Pas d'application linéaire ni de calcul matriciel pour le moment.**

Questions de cours

Les questions de cours précédées d'une ★ ne sont pas exigibles cette semaine des groupes 3 et 5 ayant colle d'informatique.

- (i) ★ Intégrales de Wallis (dont détermination d'un équivalent).
- (ii) ★ Polynômes de Tchebychev : existence, relation de récurrence, terme dominant, parité et racines.
- (iii) Définition d'un \mathbb{K} -espace vectoriel, caractérisation des sous-espaces vectoriels (énoncé seulement).
 Définition et caractérisations d'un Vect (énoncés seulement).
 Définition d'une famille (finie) libre, liée, génératrice, d'une base.
- (iv) Toute intersection de sous-espaces vectoriels en est un.
 Une famille de polynômes non nuls à degrés étagés est libre.
- (v) Définition et caractérisations des sommes directes.
- (vi) Sur-famille d'une famille liée ou génératrice, sous-famille d'une famille libre.
- (vii) Caractérisation des familles liées : soit $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \in E^n$ où E est un \mathbb{K} -espace vectoriel, alors $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ liée si et seulement s'il existe $i_0 \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $\vec{x}_{i_0} \in \text{Vect}((\vec{x}_i)_{i \neq i_0})$.
 Lorsque c'est le cas, on a alors $\text{Vect}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) = \text{Vect}(\vec{x}_i)_{i \neq i_0}$.
- (viii) ★ Théorèmes de la base extraite et de la base incomplète.
- (ix) ★ Dimension des sous-espaces, cas d'égalité.
- (x) **CCINP 87 : Interpolation de Lagrange**
 Soient x_0, x_1, \dots, x_n $n + 1$ réels deux à deux distincts.

1. Montrer que si y_0, y_1, \dots, y_n sont $n+1$ réels quelconques, alors il existe un unique polynôme P vérifiant $\deg P \leq n$ et $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \tilde{P}(x_k) = y_k$.
 Pour l'existence, on pourra, pour $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$, commencer par expliciter ce polynôme P , que l'on notera L_i , lorsque

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, y_k = \begin{cases} 0 & \text{si } k \neq i \\ 1 & \text{si } k = i \end{cases}$$

2. Prouver que $\forall p \in \llbracket 0, n \rrbracket, \sum_{i=0}^n x_i^p L_i = X^p$.