Devoir Libre n° 15

On veillera à présenter très clairement sa copie, et en particulier encadrer les résultats et tirer un trait entre les questions.

Contenu d'un polynôme et critère d'Eisenstein

On note $\mathbb{Z}[X]$ l'ensemble des polynômes d'indéterminée X à cœfficients entiers.

Pour $P \in \mathbb{Z}[X]$, on appelle **contenu** de P, noté $\mathrm{c}(P)$, le plus grand diviseur commun des cœfficients de P.

Le polynôme $P \in \mathbb{Z}[X]$ est dit **primitif** si et seulement si ses cœfficients sont premiers entre eux dans leur ensemble, c'est-à-dire si $\mathrm{c}(P) = 1$.

1. Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ et $k \in \mathbb{Z}$. Justifier que $\mathrm{c}(kP) = |k|\mathrm{c}(P)$.

2. Soient $A, B \in \mathbb{Z}[X] \setminus \{0\}$. On pose $A = a_0 + a_1X + \cdots + a_nX^n$ et $B = b_0 + b_1X + \cdots + b_mX^m$. Soit p un nombre premier qui divise tous les cœfficients de AB.

2.a) Rappeler l'expression du cœfficient c_i de X^i dans $C = AB$.

2.b) Soit $\mathscr{A} = \left\{ k \in [\![0, n]\!] \;\middle|\; p \wedge a_k = 1 \right\}$ et $\mathscr{B} = \left\{ \ell \in [\![0, m]\!] \;\middle|\; p \wedge b_\ell = 1 \right\}$. Montrer que l'on a toujours soit $\mathscr{A} = \varnothing$, soit $\mathscr{B} = \varnothing$.

Indication : on pourra, sous réserve d'existence, introduire les minima k_0 et ℓ_0 de $\mathscr{A}$ et $\mathscr{B}$ respectivement, et considérer $c_{k_0+\ell_0}$.

2.c) En déduire que soit p divise tous les cœfficients de A, soit p divise tous les cœfficients de B.

3. Montrer que si A et B sont deux polynômes primitifs, AB l'est aussi.

4. Soient $A, B \in \mathbb{Z}[X] \setminus \{0\}$. Déterminer des entiers k et ℓ tels que $\frac{1}{k}A$ et $\frac{1}{\ell}B$ soient primitifs. En déduire le[1] lemme de Gauß : $\mathrm{c}(AB) = \mathrm{c}(A)\mathrm{c}(B)$.

5. Soient $P \in \mathbb{Z}[X] \setminus \{0\}$ un polynôme primitif et $A, B \in \mathbb{Q}[X]$ tels que $P = AB$.

5.a) Montrer qu'il existe $k_1, \ell_1 \in \mathbb{Z}^*$ et $A_1, B_1 \in \mathbb{Z}[X]$ tels que $P = \dfrac{1}{k_1\ell_1}A_1B_1$.

5.b) En déduire qu'il existe $r \in \mathbb{Q}^*$ tel que $\frac{1}{r}A, rB \in \mathbb{Z}[X]$.

6. Montrer que tout polynôme $P \in \mathbb{Z}[X] \setminus \{0\}$ irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$ l'est aussi dans $\mathbb{Q}[X]$.

7. On considère maintenant un polynôme $P \in \mathbb{Z}[X] \setminus \{0\}$ unitaire donc de la forme

$$P = X^n + c_{n-1}X^{n-1} + \cdots + c_1X + c_0.$$

On suppose qu'il existe un nombre premier p tel que tous les c_i sont divisibles par p pour i entre 0 et $n-1$, mais tel que $p^2 \nmid c_0$.

Montrer que P est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$. C'est le **critère d'Eisenstein**.

On pourra montrer que si $P = AB$ avec $A, B \in \mathbb{Z}[X]$, alors soit p divise tous les cœfficients de A, soit p divise tous les cœfficients de B.

8. Application : justifier que $X^5 - 2$ et $X^4 + 2X^2 + 2X + 2$ sont irréductibles dans $\mathbb{Q}[X]$.

1. L'autre...