Devoir Libre n° 16

Exercice 1 : Espaces de fonctions

⚠ à la rédaction !

Pour $k \in [\![0,2]\!]$, on définit sur $\mathbb{R}_+^*$, $f_k(x) = x^k$ et $g_k(x) = x^k \ln x$.
On appelle $F = \{f : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2, \quad \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\}$.
On appelle $G = \{g : x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \beta_0 \ln x + \beta_1 x \ln x + \beta_2 x^2 \ln x, \quad \beta_0, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}\}$.
On pose $E = F + G$.

1. **Préliminaire** : on suppose qu'il existe deux polynômes P et Q tels que $\forall x > 0,\ \ln x = \dfrac{\tilde{P}(x)}{\tilde{Q}(x)}$.

   1.a) À l'aide d'un calcul de limite, justifier que $\deg P > \deg Q$.

   1.b) En s'intéressant cette fois à $\dfrac{\ln x}{x}$, obtenir une contradiction.

2. Montrer que les familles (f_0, f_1, f_2) et (g_0, g_1, g_2) sont libres.
3. Montrer que F et G sont des espaces vectoriels sur $\mathbb{R}$ et déterminer leur dimension.
4. Montrer que F et G sont en somme directe.
5. Montrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et déterminer sa dimension.
6. On note E' l'ensemble des fonctions de E prolongeables par continuité en 0.

   6.a) Justifier que E' est un sous-espace vectoriel de E.

   6.b) Déterminer un supplémentaire de E' dans E.

Exercice 2 : Calcul de puissances de matrices

L'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ est muni de sa base canonique notée (e_1, e_2, e_3).
Il est demandé de faire figurer tous les calculs sur la copie.
On pose

$$S = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix}$$

A. Le changement de base

Soient $e_1' = (1,1,1)$, $e_2' = (1,-1,0)$ et $e_3' = (1,1,-2)$.

1. Montrer que (e_1', e_2', e_3') est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, appelée matrice de passage de (e_1, e_2, e_3) à (e_1', e_2', e_3'). Justifier que P est inversible, puis calculer P^{-1}.

3. Déterminer la matrice $D = P^{-1}SP$.
4. Calculer D^n pour $n \in \mathbb{N}$.
5. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S^n = PD^nP^{-1}$.
6. Calculer de S^n.

B. La récurrence

7. La famille (I_3, S) est-elle libre dans $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$?
8. Montrer que S^2 peut s'exprimer sous forme de combinaison linéaire de I_3 et S.
9. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique couple (a_n, b_n) de réels tel que $S^n = a_n I_3 + b_n S$ (on convient que : $\forall M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}),\ M^0 = I_3$).
10. Donner les valeurs de a_0, b_0, a_1, b_1, et exprimer, pour $n \in \mathbb{N}$, a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n.
11. Montrer que la suite $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante, puis que la suite $(b_n + 1)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique.
12. En déduire l'expression de a_n et b_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
13. Comparer avec le résultat de la question **6**.

C. Le polynôme annulateur

14. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$.
15. En déduire l'expression de S^n pour $n \in \mathbb{N}$.
16. Comparer avec le résultat de la question **6**.

D. Le binôme

Soit $B = S - 2I_3$.

17. Calculer B^n pour $n \in \mathbb{N}$.
18. En déduire l'expression de S^n en fonction de I_3 et B pour $n \in \mathbb{N}$.
19. Comparer avec le résultat de la question **6**.

E. Extension à $\mathbb{Z}$

20. L'expression de S^n obtenue dans les parties précédentes est-elle valable pour $n \in \mathbb{Z}$?

FIN DE L'ÉNONCÉ