Calcul de DL

Il faut vous suivre !

7. $DL_4(0)$ de $\dfrac{x}{e^x-1}$

$$\frac{x}{e^x-1} = x\left(e^x-1\right)^{-1}$$

$$= x\left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + o(x^5) - 1\right)^{-1}$$

$$= x\left(x\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120} + o(x^4)\right)\right)^{-1}$$

$$= x \times x^{-1}\left(1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120} + o(x^4)\right)^{-1}$$

Justifiez ! (qqchose $\to 0$...)

Donnez clairement le DL_4 de $\dfrac{1}{1+u}$

$$= 1 - \left[\frac{x}{2} + \frac{x^2}{6} + \frac{x^3}{24} + \frac{x^4}{120}\right]$$
$$+ \left[\frac{x^2}{4} + \frac{x^4}{36} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}\right]$$
$$- \left[\frac{x^3}{8} \cancel{- 3 \times \frac{x^4}{24}} - \frac{x^4}{8}\right]$$
$$+ \left[\frac{x^4}{16}\right] + o(x^4)$$

$$= 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{12} - \frac{x^4}{720} + o(x^4)$$

Donc $\boxed{\dfrac{x}{e^x-1} = 1 - \dfrac{x}{2} + \dfrac{x^2}{12} - \dfrac{x^4}{720} + o(x^4)}$