22

Calcul matriciel

$\mathbb{K}$ désigne un corps commutatif infini, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ au programme.

I ESPACES DE MATRICES

1 Définition

Définition 1 : Matrice

Soient $n,p\in\mathbb{N}^*$. On appelle **matrice à n lignes et p colonnes à cœfficients dans $\mathbb{K}$** toute famille de $n\times p$ éléments de $\mathbb{K}$ représentée sous la forme

$$M=\begin{array}{cc}\begin{pmatrix}m_{1,1}&\dots&m_{1,j}&\dots&m_{1,p}\\ \vdots&&\vdots&&\vdots\\ m_{i,1}&\dots&m_{i,j}&\dots&m_{i,p}\\ \vdots&&\vdots&&\vdots\\ m_{n,1}&\dots&m_{n,j}&\dots&m_{n,p}\end{pmatrix}&\begin{array}{c}\\ \\ \leftarrow i\\ \\ \\ \end{array}\\ \begin{array}{ccccc}&&\uparrow&&\\ &&j&&\end{array}&\end{array}$$

On note $M=\left(m_{i,j}\right)_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\ 1\leqslant j\leqslant p}}$.

On note $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble de ces matrices.

- Lorsque $n=1$, $M=\begin{pmatrix}m_1&\dots&m_p\end{pmatrix}$, on parle de **matrice ligne**.
- Lorsque $p=1$, $M=\begin{pmatrix}m_1\\ \vdots\\ m_n\end{pmatrix}$, on parle de **matrice colonne**.
- Lorsque $p=n$, $M=\begin{pmatrix}m_{1,1}&\dots&m_{1,n}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ m_{n,1}&\dots&m_{n,n}\end{pmatrix}$, on parle de **matrice carrée**.

  On note $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ pour $\mathscr{M}_{n,n}(\mathbb{K})$.

2 Quelques matrices carrées particulières

Définition 2 : Matrice triangulaire

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On appelle **matrice triangulaire supérieure** (respectivement **inférieure**) tout matrice $M\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\forall\, i>j,\ \ m_{i,j}=0$ (respectivement $\forall\, i<j,\ \ m_{i,j}=0$.)

C'est donc une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix}\star&\dots&\dots&\star\\ 0&\ddots&&\vdots\\ \vdots&\ddots&\ddots&\vdots\\ 0&\dots&0&\star\end{pmatrix}\quad\text{(respectivement }\begin{pmatrix}\star&0&\dots&0\\ \vdots&\ddots&\ddots&\vdots\\ \vdots&&\ddots&0\\ \star&\dots&\dots&\star\end{pmatrix}\text{).}$$

On note $\mathscr{T}_n^+(\mathbb{K})$ (respectivement $\mathscr{T}_n^-(\mathbb{K})$) l'ensemble de ces matrices.

Lorsque les cœfficients diagonaux sont également tous nuls, on parle de **matrice triangulaire stricte.**

Définition 3 : Matrice diagonale

Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On appelle **matrice diagonale** tout matrice carrée $M\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ telle que $\forall\, i\neq j,\ \ m_{i,j}=0$.

C'est donc une matrice de la forme $\begin{pmatrix}\star&&(0)\\ &\ddots&\\ (0)&&\star\end{pmatrix}$.

On note $\operatorname{diag}(a_1,\dots,a_n)=\begin{pmatrix}a_1&&(0)\\ &\ddots&\\ (0)&&a_n\end{pmatrix}$.

On note $\mathscr{D}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble de ces matrices.

Définition 4 : Matrices scalaires

$I_n=\operatorname{diag}(1,\dots,1)=\begin{pmatrix}1&&(0)\\ &\ddots&\\ (0)&&1\end{pmatrix}$ est appelée **matrice identité**.

On appelle **matrice scalaire** toute matrice de la forme $\operatorname{diag}(\lambda,\dots,\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda&&(0)\\ &\ddots&\\ (0)&&\lambda\end{pmatrix}=\lambda I_n$ où $\lambda\in\mathbb{K}$.

3 Structure d'espace vectoriel

Définition 5 : Opération $+$ et $\cdot$

Pour $A,B\in\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda\in\mathbb{K}$, on pose

$$A+B=\begin{pmatrix}a_{1,1}+b_{1,1}&\dots&a_{1,p}+b_{1,p}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ a_{n,1}+b_{n,1}&\dots&a_{n,p}+b_{n,p}\end{pmatrix}$$

$$\lambda A=\begin{pmatrix}\lambda a_{1,1}&\dots&\lambda a_{1,p}\\ \vdots&\ddots&\vdots\\ \lambda a_{n,1}&\dots&\lambda a_{n,p}\end{pmatrix}$$

Propriété 1 : Espace vectoriel $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$

(i) $(\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}),+,\cdot)$ *a une structure de* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel, d'élément nul*

$$0_{\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \text{ notée } 0_{n,p}.$$

(ii) $\dim \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) = n \times p$.

Définition 6 : Base canonique

On appelle **base canonique** $(E_{1,1}, E_{1,2}, \dots, E_{n,p})$ où

$$E_{i,j} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \leftarrow i$$

$$\uparrow$$
$$j$$

appelée **matrice élémentaire**.

$M = \begin{pmatrix} m_{1,1} & \dots & m_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{n,1} & \dots & m_{n,p} \end{pmatrix}$ s'écrit de manière unique $\sum\limits_{i,j} m_{i,j} E_{i,j}$.

Propriété 2 : Cœfficients de $E_{i,j}$

$$\forall\, i,k \in [\![1,n]\!],\quad \forall\, j,\ell \in [\![1,p]\!],\quad (E_{i,j})_{k,\ell} = \delta_{i,k}\delta_{j,\ell}.$$

C'est-à-dire Chasles lorsque c'est possible ($j = k$) et 0 sinon.

Propriété 3 : Sous-espaces de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$

(i) $\mathscr{D}_n(\mathbb{K})$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ *de dimension* n.

(ii) $\mathscr{T}_n^+(\mathbb{K})$ *et* $\mathscr{T}_n^-(\mathbb{K})$ *sont des sous-espaces vectoriels de* $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ *de dimension* $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

(iii) L'ensemble des matrices triangulaires supérieures (respectivement inférieures) strictes est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ *de dimension* $\dfrac{n(n-1)}{2}$.

II PRODUIT MATRICIEL

1 Définition

Définition 7 : Produit matriciel

Soient $n, p, q \in \mathbb{N}^*$. On définit

$$\times : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \times \mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathscr{M}_{n,q}(\mathbb{K}) \\ (A,B) & \longmapsto & C = A \times B \end{array} \right.$$ avec

$$\forall\, i \in [\![1,n]\!],\quad \forall\, j \in [\![1,q]\!],\quad c_{i,j} = \sum_{k=1}^{p} a_{i,k} b_{k,j}$$

2 Propriétés

Propriété 4 : AX est une combinaison linéaire des colonnes de A

Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *une matrice et* $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{p,1}(\mathbb{K})$ *une matrice colonne.*

Alors AX *est une combinaison linéaire des colonnes de* A.

Plus précisément, $AX = x_1 C_1 + \dots + x_p C_p$ *où* C_1, ..., C_p *désignent les colonnes de* A.

Propriété 5 : Produit de matrices diag., triang., triang. str.

(i) Multiplier à gauche (respectivement à droite) par une matrice diagonale revient à multiplier les lignes (respectivement colonnes) par le cœfficient diagonal correspondant.

(ii)

$$\operatorname{diag}(a_1,\dots,a_n) \times \operatorname{diag}(b_1,\dots,b_n) = \operatorname{diag}(a_1 b_1,\dots,a_n b_n)$$

id est $\begin{pmatrix} a_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & a_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & b_n b_n \end{pmatrix}$.

(iii) $\begin{pmatrix} a_1 & & (\star) \\ & \ddots & \\ (0) & & a_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 & & (\star) \\ & \ddots & \\ (0) & & b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & & (\star) \\ & \ddots & \\ (0) & & a_n b_n \end{pmatrix}$

et

$\begin{pmatrix} a_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (\star) & & a_n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (\star) & & b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 b_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (\star) & & a_n b_n \end{pmatrix}$.

(iv) Si $0 \leqslant \ell \leqslant n$, $\begin{pmatrix} 0 & & (\star) \\ & \ddots & \\ (0) & & 0 \end{pmatrix}^{\ell} = \begin{array}{c} \overset{\leftarrow\ \ell\ \rightarrow}{} \\ \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & & (\star) \\ & \ddots & & \ddots & \\ & & \ddots & & 0 \\ & (0) & & \ddots & \vdots \\ & & & & 0 \end{pmatrix} \end{array}$

Idem avec les matrices triangulaires inférieures strictes.

Propriété 6 : Bilinéarité, associativité, neutre

(i) ***Associativité*** : *Soient* $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$, $C \in \mathcal{M}_{q,r}(\mathbb{K})$.

$$A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$$

(ii) ***Bilinéarité*** : *Soient* $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.

$$A \longmapsto A \times B \quad \text{et} \quad B \longmapsto A \times B$$

sont linéaires.

(iii) ***Neutre*** : *Si* $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $A \times I_p = I_n \times A = A$.

Propriété 7 : $E_{i,j} \times E_{k,\ell}$

Lorsque les tailles sont compatibles,

$$E_{i,j} \times E_{k,\ell} = \delta_{j,k} E_{i,\ell}$$

3 La $\mathbb{K}$-algèbre $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

a Structure

Propriété 8 : Structure d'anneau, d'algèbre

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ *est un anneau, ni commutatif ni intègre dès que* $n \geqslant 2$*, d'élément unité* I_n.

Ainsi, $(\mathcal{M}_n(\mathbb{K}), +, \times, \cdot)$ *est une* $\mathbb{K}$*-algèbre de dimension* n^2.

Propriété 9 : Sous-algèbres

$\mathcal{D}_n(\mathbb{K})$, $\mathcal{T}_n^+(\mathbb{K})$ *et* $\mathcal{T}_n^-(\mathbb{K})$ *sont des sous-algèbres de* $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

b Conséquences

On peut en particulier appliquer :

Propriété 10 : Formules du Binôme et $A^m - B^m$

Si $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *tels que* $\boxed{A \times B = B \times A}$, $m \in \mathbb{N}$,

$$(A+B)^m = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} A^k B^{m-k}$$

$$A^m - B^m = (A-B)\left(A^{m-1} + A^{m-2}B + \cdots + AB^{m-2} + B^{m-1}\right)$$

Définition 8 : Polynôme en une matrice

Si $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_d X^d \in \mathbb{K}[X]$, on pose

$$P(A) = a_0 I_n + a_1 A + \cdots + a_d A^d.$$

Si $P(A) = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$ on dit que A **annule** P ou que P est un **polynôme annulateur** de A.

Définition 9 : Nilpotence

Un matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite **nilpotente** lorsqu'il existe un entier k tel que $A^k = 0_{\mathcal{M}_n(\mathbb{K})}$.

Le plus petit k vérifiant cette propriété s'appelle **indice de nilpotence** de A.

c Inversion de matrices

Définition 10 : Groupe linéaire

On appelle **groupe linéaire** l'ensemble $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ des matrices de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ inversibles (pour $\times$).

$$A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \exists B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}), \quad A \times B = B \times A = I_n.$$

L'inverse de A est notée A^{-1}.

Propriété 11 : des matrices inversibles

(i) $(\mathcal{GL}_n(\mathbb{K}), \times)$ *est un groupe.*

(ii) *Si* $A, B \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$, $A \times B \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ *et* $(A \times B)^{-1} = B^{-1} \times A^{-1}$.

(iii) *Si* $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$, $A^{-1} \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ *et* $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.

(iv) *Sont équivalentes :*
- A *est inversible*
- A *est inversible à gauche*
- A *est inversible à droite*
- *les colonnes de* A *forment une famille libre*
- *les lignes de* A *forment une famille libre*

(v) *Si* $\lambda \in \mathbb{K} \setminus \{0_{\mathbb{K}}\}$ *et* $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$, $\lambda A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ *et* $(\lambda A)^{-1} = \lambda^{-1} A^{-1}$.

Méthode : Pour démontrer l'inversibilité d'une matrice et calculer son inverse,

on peut :

- Résoudre le système $A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$: il admet une unique solution si et seulement si A est inversible et alors on obtient $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$.

- Effectuer des opérations élémentaires (pivot de Gauss) :
  - ⋆ soit exclusivement sur les lignes,
  - ⋆ soit exclusivement sur les colonnes,

  se ramener à I_n et effectuer les mêmes opérations simultanément en partant de I_n qui va devenir A^{-1} si A est inversible :

$$\begin{array}{cc} A & I_n \\ \vdots & \vdots \\ I_n & A^{-1} \end{array}$$

- Utiliser un polynôme annulateur : si on a un polynôme P tel que $P(A) = 0_n$ avec un cœfficient constant non nul, on peut trouver une matrice B telle que $AB = I_n$ en isolant I_n (terme constant).

d Inversibilité des matrices triangulaires

Propriété 12 : Inversibilité des matrices triangulaires

Une matrice triangulaire est inversible si et seulement si aucun de ses cœfficients diagonaux n'est nul, et alors son inverse est encore triangulaire, d'éléments diagonaux l'inverse des éléments diagonaux.

$$\begin{pmatrix} a_1 & \star & \cdots & \star \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \star \\ (0) & & & a_n \end{pmatrix} \text{ est inversible}$$

$$\iff \forall\, i \in [\![1, n]\!],\quad a_i \neq 0$$

et alors

$$\begin{pmatrix} a_1 & \star & \cdots & \star \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \star \\ (0) & & & a_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a_1^{-1} & \star & \cdots & \star \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \star \\ (0) & & & a_n^{-1} \end{pmatrix}$$

(idem pour les matrices triangulaires inférieures.)

Corollaire 1 : Inversibilité des matrices diagonales

$$\begin{pmatrix} a_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & a_n \end{pmatrix} \text{ est inversible } \iff \forall\, i \in [\![1, n]\!],\quad a_i \neq 0$$

et alors

$$\begin{pmatrix} a_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & a_n \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} a_1^{-1} & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & a_n^{-1} \end{pmatrix}$$

III TRANSPOSITION

1 Définition

Définition 11 : Transposée

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

On appelle **transposée** de A la matrice $A^\intercal \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ telle que

$$\forall\, (i, j) \in [\![1, p]\!] \times [\![1, n]\!],\quad \left(A^\intercal\right)_{i,j} = (A)_{j,i}$$

2 Propriétés

Propriété 13 : de la transposition

Soit $T : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \\ A & \longmapsto & A^\intercal \end{array}$

(i) ***Linéarité*** *: Si* $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$(A+B)^\intercal = A^\intercal + B^\intercal \quad \text{et} \quad (\lambda A)^\intercal = \lambda A^\intercal$$

(ii) T *est* ***involutif*** *: si* $A, B \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$,

$$\left(A^\intercal\right)^\intercal = A$$

En particulier T *est une bijection.*

(iii) Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}), B \in \mathcal{M}_{p,q}(\mathbb{K})$,

$$(A \times B)^\intercal = B^\intercal \times A^\intercal$$

(iv) $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ *si et seulement si* $A^\intercal \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ *et dans ce cas*

$$\left(A^\intercal\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^\intercal$$

3 Matrices symétriques et antisymétriques

Définition 12 : Matrices symétriques et antisymétriques

(i) On dit que $S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est **symétrique** lorsque $S^\intercal = S$ ie $\forall\, i,j \in [\![1,n]\!],\quad s_{i,j} = s_{j,i}$.
On note $\mathcal{S}_n(\mathbb{K}) = \{S \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid S^\intercal = S\}$.

(ii) On dit que $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est **antisymétrique** lorsque $A^\intercal = -A$ ie $\forall\, i,j \in [\![1,n]\!],\quad a_{j,i} = -a_{i,j}$.
On note $\mathcal{A}_n(\mathbb{K}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid A^\intercal = -A\}$.

Propriété 14 : Supplémentarité de $\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$

$\mathcal{S}_n(\mathbb{K})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{K})$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

De plus, $\dim \mathcal{S}_n(\mathbb{K}) = \dfrac{n(n+1)}{2}$ *et* $\dim \mathcal{A}_n(\mathbb{K}) = \dfrac{n(n-1)}{2}$.

IV TRACE D'UNE MATRICE CARRÉE

Définition 13 : Trace

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle **trace** de A le scalaire

$$\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} a_{i,i}.$$

Propriété 15 : de la trace

(i) ***Linéarité*** *: Si* $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}$, $\operatorname{tr}(A+B) = \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B$ *et* $\operatorname{tr}(\lambda A) = \lambda \operatorname{tr} A$.

(ii) *Si* $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ *et* $B \in \mathcal{M}_{p,n}(\mathbb{K})$, $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$.

⚠ $\operatorname{tr}(ABC) = \operatorname{tr}(CAB) = \operatorname{tr}(BCA) \neq \operatorname{tr}(BAC)$ en général. (Permutations circulaires seulement).

V PRODUIT PAR BLOCS

Théorème 1 : Produit par blocs

Soient $n, m, p, q, r, s \in \mathbb{N}^*$.
Soit les matrices définies par blocs

$$M = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overset{p}{\leftrightarrow} & \overset{q}{\leftrightarrow} \end{array} \\ \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \updownarrow n \\ \updownarrow m \end{array} \in \mathcal{M}_{n+m,p+q}(\mathbb{K})$$

$$N = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \overset{r}{\leftrightarrow} & \overset{s}{\leftrightarrow} \end{array} \\ \begin{pmatrix} E & F \\ G & H \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \updownarrow p \\ \updownarrow q \end{array} \in \mathcal{M}_{p+q,r+s}(\mathbb{K})$$

où A, B, C, D, E, F, G, H *sont des matrices de format correspondant. Alors*

$$M \times N = \begin{pmatrix} AE + BG & AF + BH \\ CE + DG & CF + DH \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+m,r+s}(\mathbb{K}).$$

VI OPÉRATIONS ÉLÉMENTAIRES

1 Rappel

On rappelle qu'il existe 3 types d'opérations élémentaires :

- **Les transpositions** : $L_i \leftrightarrow L_j$ ou $C_i \leftrightarrow C_j$.
- **Les transvections** : $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_k$ avec $k \neq i$ ou $C_j \leftarrow C_j + \lambda C_k$ avec $k \neq j$.
- **Les dilations** : $L_i \leftarrow \lambda L_i$ ou $C_j \leftarrow \lambda C_j$ avec $\lambda \neq 0$.

2 Interprétation en termes de produit matriciel

Les opérations élémentaires se traduisent par des multiplications à gauche (pour les lignes) ou à droite (pour les colonnes) par des matrices (carrées) inversibles dont la taille est égale aux nombre de lignes respectivement colonnes correspondantes.

- **Transpositions** : $L_i \leftrightarrow L_j$ (resp. $C_i \leftrightarrow C_j$) se traduit par la multiplication à gauche (resp. à droite) par la **matrice de transposition** :

$$P_{i,j}=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}1&&&&&&&&(0)\\&\ddots&&&&&&&\\&&1&&&&&&\\&&&0&\cdots&\cdots&1&&\\&&&\vdots&1&&\vdots&&\\&&&\vdots&&\ddots&\vdots&&\\&&&\vdots&&1&\vdots&&\\&&&1&\cdots&\cdots&0&&\\&&&&&&&1&\\&&&&&&&&\ddots\\(0)&&&&&&&&1\end{pmatrix}\\ \begin{matrix}\qquad\qquad\uparrow&\qquad\qquad&\uparrow\qquad\qquad\\ \qquad\qquad i^{\text{e}}&&j^{\text{e}}\qquad\qquad\end{matrix}\end{array}$$

$P_{i,j}^2=I_n$, $P_{i,j}$ inversible et $P_{i,j}^{-1}=P_{i,j}$.

- **Transvections** : $L_i \leftarrow L_i+\lambda L_k$ (resp. $C_j \leftarrow C_j+\lambda C_k$) se traduit par la multiplication par une **matrice de transvection** $T_{i,k}(\lambda)$ à gauche (resp. $T_{k,j}(\lambda)$ à droite) avec

$$T_{i,j}(\lambda)=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}1&&&&&(0)\\&\ddots&&&&\\&&1&&&\\&&\vdots&\ddots&&\\&&\lambda&\cdots&1&\\(0)&&&&\ddots&\\&&&&&1\end{pmatrix}\begin{matrix}\\\\\\\\\leftarrow i^{\text{e}}\\\\\\\end{matrix}\\ \begin{matrix}\uparrow\\ j^{\text{e}}\end{matrix}\end{array}=I_n+\lambda E_{i,j}$$

$T_{i,j}(\lambda)T_{i,j}(\mu)=T_{i,j}(\lambda+\mu)$ donc $T_{i,j}(\lambda)$ inversible et $\left(T_{i,j}(\lambda)\right)^{-1}=T_{i,j}(-\lambda)$.

- **Dilatation** : $L_i \leftarrow \lambda L_i$ (resp. $C_i \leftarrow \lambda C_i$) avec $\lambda \neq 0$ se traduit par la multiplication par une **matrice de dilatation** $D_i(\lambda)$ à gauche (resp. à droite) avec

$$D_i(\lambda)=\begin{array}{c}\begin{pmatrix}1&&&&&(0)\\&\ddots&&&&\\&&1&&&\\&&&\lambda&&\\&&&&1&\\(0)&&&&&\ddots\\&&&&&&1\end{pmatrix}\\ \begin{matrix}\uparrow\\ i^{\text{e}}\end{matrix}\end{array}$$

$D_i(\lambda)D_i(\mu)=D_i(\lambda\mu)$ donc $D_i(\lambda)$ inversible et $(D_i(\lambda))^{-1}=D_i\left(\lambda^{-1}\right)$.

Propriété 16 : Opération élémentaire et inversibilité

Une opération élémentaire sur ses lignes ou les colonnes préserve l'inversibilité.

3 Application à l'inversion de matrice

Propriété 17

Par des opérations élémentaires sur des lignes (respectivement des colonnes), on peut transformer une matrice inversible de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ en I_n.

Méthode

On en déduit la méthode d'inversion de matrice par opérations **exclusivement** sur les lignes ou les colonnes de A : il suffit d'appliquer les mêmes opérations qui transforment A en I_n pour transformer I_n en A^{-1}.

VII SYSTÈMES LINÉAIRES

1 Traductions d'un système linéaire

On considère un système linéaire de n équations à p inconnues dans $\mathbb{K}$:

$$(S)\quad\left\{\begin{array}{c}a_{1,1}x_1+a_{1,2}x_2+\cdots+a_{1,p}x_p=b_1\\ \vdots\\ a_{n,1}x_1+a_{n,2}x_2+\cdots+a_{n,p}x_p=b_n\end{array}\right.$$

On rappelle que la matrice du système linéaire est définie par

$$A=\begin{pmatrix}a_{1,1}&\ldots&a_{1,p}\\ \vdots&&\vdots\\ a_{n,1}&\ldots&a_{n,p}\end{pmatrix}\in\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

et la matrice augmentée est

$$M=\left(\begin{array}{ccc|c}a_{1,1}&\ldots&a_{1,p}&b_1\\ \vdots&&\vdots&\vdots\\ a_{n,1}&\ldots&a_{n,p}&b_n\end{array}\right)$$

Interprétation matricielle : si $X=\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_p\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}b_1\\ \vdots\\ b_n\end{pmatrix}$,

$$\boxed{(S)\Longleftrightarrow AX=B}$$

2 Espace des solutions

Propriété 18 : Structure de $\mathscr{S}_H$

L'ensemble $\mathscr{S}_H$ des solutions du système homogène (H) associé à (S) est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^p$.

Propriété 19 : Structure de $\mathscr{S}_S$

L'ensemble des solution $\mathscr{S}_S$ est soit vide, soit de la forme $\mathscr{S}_S = \vec{x}_0 + \mathscr{S}_H$ où $\vec{x}_0 \in \mathbb{K}^p$ est une solution particulière. On parle de sous-espace affine de $\mathbb{K}^p$ de direction $\mathscr{S}_H$.

Lorsque $\mathscr{S}_S = \varnothing$, le système est dit ***incompatible****. Sinon il est* ***compatible****.*