

Probabilités finies

Extrait du programme officiel :

Cette section, qui a vocation à interagir avec l'ensemble du programme, a pour objectif de donner aux étudiants une bonne pratique des variables aléatoires dans le cadre fini.

Pour enrichir la pratique de la modélisation probabiliste développée au lycée, on met en évidence qu'une situation probabiliste finie peut être décrite par un n -uplet de variables aléatoires, l'univers étant vu dans cette optique comme une source suffisante d'aléa. L'objectif de cette présentation est de pouvoir travailler le plus tôt possible avec des événements construits en termes de variables aléatoires. La construction d'un univers fini susceptible de porter un n -uplet de variables aléatoires peut être présentée, mais ne constitue pas un objectif du programme.

Les exemples et activités proposés sont de nature plus conceptuelle qu'au lycée. On pourra faire travailler les étudiants sur des marches aléatoires ou des chaînes de Markov en temps fini, sur des permutations aléatoires (loi uniforme sur S_n), des graphes aléatoires, des inégalités de concentration...

CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

a) Univers, événements, variables aléatoires

Lien entre vocabulaire ensembliste et vocabulaire des probabilités.

On se limite au cas d'un univers fini. Événement élémentaire (singleton), système complet d'événements, événements disjoints (ou incompatibles).

Une variable aléatoire X est une application définie sur l'univers Ω à valeurs dans un ensemble E .

Notations $\{X \in A\}$ et $(X \in A)$.

b) Espaces probabilisés finis

Probabilité sur un univers fini.

Espace probabilisé fini (Ω, P) .
Notations $P(X \in A)$, $P(X = x)$ et $P(X \leq x)$.

Une distribution de probabilités sur un ensemble E est une famille d'éléments de \mathbb{R}^+ indexée par E et de somme 1.
Une distribution de probabilités sur un ensemble fini est une famille de réels positifs indexée par cet ensemble et de somme 1.

Une probabilité P sur Ω est déterminée par la distribution de probabilités $(P(\{\omega\}))_{\omega \in \Omega}$.

Probabilité uniforme.

Probabilité de la réunion ou de la différence de deux événements, de l'événement contraire. Croissance.

La formule du crible est hors programme.

c) Probabilités conditionnelles

Si $P(B) > 0$, la probabilité conditionnelle de A sachant B est définie par la relation $P(A|B) = P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.
L'application P_B est une probabilité.

Par convention, $P(A|B)P(B) = 0$ lorsque $P(B) = 0$.

Formules des probabilités composées, des probabilités totales, de Bayes.

d) Loi d'une variable aléatoire

Loi P_X d'une variable aléatoire X à valeurs dans E .

La probabilité P_X est déterminée par la distribution de probabilités $(P(X = x))_{x \in E}$.

On note $X \sim Y$ la relation $P_X = P_Y$.

Variable aléatoire $f(X)$.

Si $X \sim Y$ alors $f(X) \sim f(Y)$.

Variable uniforme sur un ensemble fini non vide E .

Notation $X \sim \mathcal{U}(E)$.

Variable de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$.

Notation $X \sim \mathcal{B}(p)$.

Interprétation comme succès d'une expérience.

Variable binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0, 1]$.

Notation $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.

Loi conditionnelle d'une variable aléatoire X sachant un événement A .



CONTENUS

CAPACITÉS & COMMENTAIRES

Couple de variables aléatoires. Loi conjointe, lois marginales.

Un couple de variables aléatoires est une variable aléatoire à valeurs dans un produit.
Notation $P(X = x, Y = y)$.
Extension aux n -uplets de variables aléatoires.

e) Événements indépendants

Les événements A et B sont indépendants si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Famille finie d'événements indépendants.

Si A et B sont indépendants, A et \bar{B} le sont aussi.

Si $P(B) > 0$, l'indépendance de A et B s'écrit $P(A|B) = P(A)$.

L'indépendance deux à deux n'implique pas l'indépendance.

Extension au cas de n événements.

f) Variables aléatoires indépendantes

Les variables aléatoires X et Y définies sur l'univers Ω sont indépendantes si pour tout $A \in \mathcal{P}(X(\Omega))$ et tout $B \in \mathcal{P}(Y(\Omega))$, les événements $(X \in A)$ et $(Y \in B)$ sont indépendants.

Extension aux n -uplets de variables aléatoires.

Si X_1, \dots, X_n sont indépendantes de loi $\mathcal{B}(p)$, alors $X_1 + \dots + X_n$ suit la loi $\mathcal{B}(n, p)$.

Si les variables aléatoires X et Y sont indépendantes, alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

Lemme des coalitions : si les variables aléatoires X_1, \dots, X_n sont indépendantes, alors $f(X_1, \dots, X_m)$ et $g(X_{m+1}, \dots, X_n)$ le sont aussi.

Notation $X \perp Y$. Cette condition équivaut au fait que la distribution de probabilités de (X, Y) est donnée par $P((X, Y) = (x, y)) = P(X = x)P(Y = y)$.

Modélisation de n expériences aléatoires indépendantes par une suite finie $(X_i)_{1 \leq i \leq n}$ de variables aléatoires indépendantes.

Interprétation : nombre de succès lors de la répétition de n expériences indépendantes ayant chacune la probabilité p de succès.

Extension au cas de plus de deux coalitions.

Table des matières

23 Probabilités finies	1
I Expérience aléatoire, univers, variables aléatoires	3
1 Expérience aléatoire	3
2 Univers et événements	3
3 Variables aléatoires	5
II Espaces probabilisés finis	7
1 Probabilité	7
2 Propriétés	7
3 Détermination par image des événements élémentaires	9
4 Probabilité uniforme	10
III Probabilités conditionnelles	12
1 Définition	12
2 Formule des probabilités composées	13
3 Formule des probabilités totales	14
4 Formule de Bayes	16
IV Loi d'une variable aléatoire	18
1 Généralités	18
2 Quelques lois usuelles	19
a Loi uniforme	19
b Loi de Bernoulli	19
c Loi binomiale	20
V Opérations sur les variables aléatoires	21
1 Fonction d'une variable aléatoire	21
2 Couples de variables aléatoires	22
a Définitions	22
b Lois conjointe et marginales	22
c Loi conditionnelle	23
3 Extension aux n -uplets	24
VI Indépendance	24
1 Couple d'événements indépendants	24
2 Famille d'événements indépendants	26
3 Modélisation d'expériences aléatoires indépendantes	27
a Cas de deux épreuves successives indépendantes	28
b Généralisation	28
c Épreuves répétées	28
4 Variables aléatoires indépendantes	28
a Cas d'un couple de variable	28



EXPÉRIENCE ALÉATOIRE, UNIVERS, VARIABLES ALÉATOIRES

1 Expérience aléatoire

Une expérience est dite **aléatoire** lorsque l'on ne peut pas prédire de manière certaine son résultat. Autrement dit, il s'agit d'une expérience renouvelable et dont le résultat ne sera a priori pas toujours le même.

Exemple 1

Lancer de dé, lancer de pièce, tirage d'une carte, tirage d'une chaussette dans un tiroir, etc.

À chaque expérience aléatoire, on va associer un **résultat** (on dit aussi une **issue** ou une **réalisation**), dépendant de ce que l'on souhaite observer.

Exemple 2

La face sur laquelle retombe la pièce ou le dé, la couleur ou la valeur d'une carte (ou les deux!), la couleur d'une chaussette, ou sa taille, ou pied gauche/pied droit, etc.

2 Univers et événements

Définition 1 : Univers

L'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire est appelé **univers** (ou univers des possibles), souvent noté Ω .

Remarques 1

- R1 – Un élément de l'univers est un résultat (ou issue, ou réalisation) de l'expérience aléatoire.
- R2 – Pour une même expérience aléatoire, on peut définir plusieurs univers. Celui-ci dépend de ce que l'on souhaite observer. Il est donc a priori indispensable de le préciser... sauf, comme nous le verrons, dans le contexte des variables aléatoires, où il n'est pas toujours si important.
- R3 – Dans notre programme, les univers seront toujours finis et non vide. En classe de spéciale, ils pourront aussi être infinis, mais dénombrables.
- R4 – Les résultats, éléments de l'univers Ω , sont en général notés ω .

Exemples 1

- E1 – Deux joueurs lancent simultanément deux dés à 6 faces pour obtenir la meilleure somme. L'expérience aléatoire peut être modélisée par

$$\Omega = \llbracket 1, 6 \rrbracket^4$$

en s'intéressant au résultat de chaque dé, ou encore par

$$\Omega = \llbracket 2, 12 \rrbracket^2$$

si on ne s'intéresse qu'à la somme obtenue, sans discerner la façon de l'obtenir.

- E2 – **Exemples fondamentaux!** Soient $n, N \in \mathbb{N}^*$. Dans chacun des cas suivants, proposer un univers pour modéliser l'expérience et la forme des résultats de celle-ci.
 - On effectue n tirages successifs **avec remise** d'une boule dans une urne de N boules numérotées de 1 à N . On choisit $\Omega = \llbracket 1, N \rrbracket^n$. Un résultat est une n -liste d'éléments de $\llbracket 1, N \rrbracket$.
 - On effectue n tirages successifs **sans remise** d'une boule dans une urne de N boules numérotées de 1 à N . On choisit $\Omega = \mathcal{A}_n(\llbracket 1, N \rrbracket)$. Un résultat est un n -arrangement d'éléments de $\llbracket 1, N \rrbracket$.

- On effectue un tirage de n boules **simultanément** dans une urne de N boules numérotées de 1 à N . On choisit $\Omega = \mathcal{P}_n(\llbracket 1, N \rrbracket)$. Un résultat est une n -combinaisons d'éléments de $\llbracket 1, N \rrbracket$.
- E3 – On mélange n cartes numérotées de 1 à n . On choisit $\Omega = \mathfrak{S}_n$ où $\omega \in \mathfrak{S}_n$ représente une permutation des cartes.

Définition 2 : Événement

On appelle **événement aléatoire** tout ensemble de résultats d'une expérience aléatoire modélisée observable. C'est donc une partie de l'univers Ω des possibles.

Exemples 2

- E1 – On lance deux dés à 6 faces distinguables : $\Omega = \llbracket 1, 6 \rrbracket^2$.
L'événement « Obtenir un double » est la partie $A = \{(i, i) \mid i \in \llbracket 1, 6 \rrbracket\}$ de Ω .
- E2 – On mélange un jeu de n cartes : $\Omega = \mathfrak{S}_n$.
L'événement « La première carte se trouve dans la première moitié du paquet » est la partie $A = \{\omega \in \mathfrak{S}_n \mid \omega(1) \leq \frac{n}{2}\}$ de Ω .

Remarques 2

- R1 – Pour un univers fini, on supposera que l'ensemble des événements est $\mathcal{P}(\Omega)$. Ce n'est pas toujours le cas pour un univers infini.
- R2 – En réalité, les probabilistes confondent usuellement dans le vocabulaire la réalisation d'un événement $\omega \in A$ et l'événement lui-même.

Définition 3 : Vocabulaires probabiliste et ensembliste

Terminologie probabiliste	Terminologie ensembliste
Résultat possible	$\omega \in \Omega$
Événement	$A \in \mathcal{P}(\Omega)$
A est réalisé	$\omega \in A$
A implique B	$A \subset B$
Événement élémentaire	Singleton $\{\omega\}$ où $\omega \in \Omega$
Événement « A ou B »	$A \cup B$
Événement « A et B »	$A \cap B$
Contraire de A (A n'est pas réalisé)	$\bar{A} = \Omega \setminus A$
Événement impossible	\emptyset
Événement certain	Ω
A et B sont incompatibles	A et B sont disjoints : $A \cap B = \emptyset$

Définition 4 : Système complet d'événements

On dit que $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ est un **système complet d'événements** (sce) lorsque les événements sont deux à deux incompatibles et que $\bigsqcup_{1 \leq i \leq n} A_i$ est l'événement certain Ω .



Autrement dit, lorsque $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ forme un recouvrement disjoint de Ω :

$$\forall i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset \quad \text{et} \quad \bigcup_{1 \leq i \leq n} A_i = \Omega.$$

Remarques 3

R1 – Il s'agit de la disjonction de cas classique. Par exemple, si on lance un dé à 6 faces, A_1 : « Obtenir un nombre pair » et A_2 : « Obtenir un nombre impair » forment un sce.

R2 – Si $(A_i)_{i \in I}$ est un sce, tout événement B s'écrit

$$B = \bigsqcup_{i \in I} (B \cap A_i).$$

Propriété 1 : sce couple et élémentaire

Soit Ω un univers fini.

(i) Pour tout événement A , la famille (A, \bar{A}) est un système complet d'événements de Ω .

(ii) La famille $(\{\omega\})_{\omega \in \Omega}$ formée des événements élémentaires est un système complet d'événements de Ω .

3 Variables aléatoires

Exemple 3

On lance n fois une pièce équilibrée. Le nombre de pile obtenus dépend de la suite des lancers. On modélise l'expérience par $\Omega = \{0, 1\}^n$ (0 pour face et 1 pour pile).

Le nombre recherché s'écrit $X(\omega) = \sum_{i=1}^n \omega_i$ où $\omega = (\omega_1, \dots, \omega_n)$.

Si $k \in \mathbb{N}$, il est intéressant de considérer l'événement $X^{-1}(\{k\}) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = k\}$ correspondant à l'ensemble des lancers donnant k fois pile.

Définition 5 : Variable aléatoire

Soit Ω et E deux ensembles non vides. On appelle **variable aléatoire** sur Ω à valeur dans E toute application

$$X : \Omega \longrightarrow E$$

Lorsque $E \subset \mathbb{R}$, on parle de **variable aléatoire réelle**.

Lorsque $X(\Omega)$ est fini, on parle de **variable aléatoire finie**.

Si $A \subset E$, l'événement

$$X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\}$$

est noté $\{X \in A\}$ ou $(X \in A)$.

En particulier, on note $(X = x)$ l'événement

$$X^{-1}(\{x\}) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\}$$

et si X est une variable aléatoire réelle, $(X \leq x)$ l'événement

$$X^{-1}(]-\infty, x]) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\},$$

etc.

Comme pour toute fonction, on note $\text{Im } X = X(\Omega) = \{X(\omega) ; \omega \in \Omega\}$.

Remarques 4

- R1 – Une variable aléatoire n’est pas une variable et n’est pas aléatoire.
- R2 – Si Ω est fini, alors une variable aléatoire X sur Ω est finie.
- R3 – Dans la pratique, on ne détermine pas toujours Ω explicitement. En particulier, notre théorie s’applique dès que l’on a une variable aléatoire finie.
- R4 – Un variable aléatoire constante (ie telle que $|X(\Omega)| = 1$) est dite **certaine** ou **dégénérée**.

Exemple 4

Si F événement de l’univers Ω , alors

$$\mathbb{1}_F : \begin{cases} \Omega & \rightarrow \{0, 1\} \\ \omega & \rightarrow \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in F \\ 0 & \text{si } \omega \notin F \end{cases} \end{cases}$$

est une variable aléatoire.

Propriété 2 : sce associé à X

Soit X variable aléatoire sur Ω à valeurs dans E , $A \subset E$.

$$(X \in A) = \bigsqcup_{x \in A} (X = x).$$

En particulier, avec $A = X(\Omega)$, $((X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est un système complet d’événements appelé **système complet d’événements associé à X** .

Démonstration

$$\omega \in (X \in A) \iff X(\omega) \in A \iff \exists x \in A, X(\omega) = x.$$

III ESPACES PROBABILISÉS FINIS

Lorsque l’on s’intéresse à un phénomène aléatoire, on cherche naturellement à quelle fréquence intervient un événement : si on répète n fois l’expérience, combien de fois l’événement sera réalisé ?

1 Probabilité

Définition 6 : Probabilité

Soit Ω un univers fini. On appelle **probabilité** sur Ω toute application \mathbb{P} définie sur $\mathcal{P}(\Omega)$ à valeurs réelles telle que

- Pour tout $A \in \mathcal{P}(\Omega)$, $\mathbb{P}(A) \geq 0$.
- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
- \mathbb{P} est **additive** : si A, B sont incompatibles, $\mathbb{P}(A \sqcup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

Exemple 5

$\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$ définit une probabilité sur Ω .



Définition 7 : Espace probabilisé fini

On appelle **espace probabilisé fini** tout couple (Ω, \mathbb{P}) où Ω est fini et \mathbb{P} est une probabilité sur Ω .

Remarque 1

En général, un espace probabilisé est de la forme $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ où \mathcal{A} est l'ensemble des événements. Lorsque Ω est fini, on prend systématiquement $\mathcal{A} = \mathcal{P}(\Omega)$.

Notation 1

Si (Ω, \mathbb{P}) est un espace probabilisé fini, X une variable aléatoire sur Ω à valeurs dans E , A une partie de E , x un élément de E .

On note $\mathbb{P}(X \in A)$, $\mathbb{P}(X = x)$ et $\mathbb{P}(X \leq x)$ les probabilités des événements $(X \in A)$, $(X = x)$ et, si $E \subset \mathbb{R}$, $(X \leq x)$ respectivement.

Exemple 6

$$\mathbb{P}(\mathbb{1}_F = 1) = \mathbb{P}(F) \text{ et } \mathbb{P}(\mathbb{1}_F = 0) = \mathbb{P}(\overline{F}).$$

2 Propriétés

Propriété 3 : d'une probabilité

Soit (Ω, \mathbb{P}) un espace probabilisé fini, $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$ deux événements.

- (i) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$.
- (ii) $\mathbb{P}(\overline{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$.
- (iii) **Croissance** : Si $A \subset B$, $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.
- (iv) $\mathbb{P}(A) \in [0, 1]$
- (v) $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.
Et donc si $A \subset B$, $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$.
- (vi) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.
- (vii) Si A_1, \dots, A_n sont des parties de Ω deux à deux disjointes (ie des événements deux à deux incompatibles),

$$\mathbb{P}(A_1 \sqcup \dots \sqcup A_n) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k).$$

$$(viii) \mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\{\omega\}).$$

Démonstration

- (i) Par additivité, $\mathbb{P}(\emptyset) = \mathbb{P}(\emptyset \sqcup \emptyset) = 2\mathbb{P}(\emptyset)$.
- (ii) $1 = \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(A \sqcup \overline{A}) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(\overline{A})$.
- (iii) $\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \sqcup B \setminus A) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B \setminus A) \geq \mathbb{P}(A)$.
- (iv) $\emptyset \subset A \subset \Omega$ et croissance.
- (v) $(B \setminus A) \sqcup (A \cap B) = B$.
- (vi) $A \cup B = A \sqcup (B \setminus A)$.
- (vii) Récurrence. ■

Propriété 4 : Inégalité de Boole

$$\text{Si } A_1, \dots, A_n \in \mathcal{P}(\Omega), \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i).$$

Remarque 2

Souvent, $\sum_i \mathbb{P}(A_i) \geq 1$ et ce n'est pas très intéressant.

Démonstration

Par récurrence sur n : ok si $n = 1$ ou 2 .

Si c'est vrai pour $n - 1$, $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n-1} A_i\right) + \mathbb{P}(A_n)$ par le cas $n = 2$. ■

Exercice 1 : Si A, B, C sont des événements, calculer $\mathbb{P}(A \cup B \cup C)$.

$$\mathbb{P}(A \cup B \cup C) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}(C) - \mathbb{P}(A \cap B) - \mathbb{P}(A \cap C) - \mathbb{P}(B \cap C) + \mathbb{P}(A \cap B \cap C).$$

Exercice 2 : Formule de Poincaré

Montrer que pour toute famille $(A_1, \dots, A_n) \in \mathcal{P}(\Omega)^n$,

$$\mathbb{P}(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) + \dots + (-1)^{n-1} \mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n)$$

Par récurrence, comme la formule de crible.

$$\mathbb{P}(A_1 \cup \dots \cup A_{n+1}) = \mathbb{P}(A_1 \cup \dots \cup A_n) + \mathbb{P}(A_{n+1}) - \mathbb{P}((A_1 \cap A_{n+1}) \cup \dots \cup (A_n \cap A_{n+1}))$$

puis on applique deux fois HR et on regroupe les termes.

Propriété 5 : Expression d'une probabilité à l'aide d'un sce

Si (Ω, \mathbb{P}) est un espace probabilisé fini et A_1, \dots, A_n un système complet d'événements, alors pour tout événement B ,

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(B \cap A_i).$$

Démonstration

$$B = \bigsqcup_{i=1}^n (B \cap A_i). \quad \blacksquare$$

Remarque 3

Cela correspond à une disjonction de cas.

Corollaire 1 : Cas d'un couple sce

Si (Ω, \mathbb{P}) est un espace probabilisé fini et A un événement, alors pour tout événement B ,

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \cap A) + \mathbb{P}(B \cap \bar{A})$$



3 Détermination par image des événements élémentaires

Si \mathbb{P} est une probabilité sur Ω et pour tout ω , $\mathbb{P}(\{\omega\}) = p_\omega$, alors on a bien $p_\omega \geq 0$ et

$$\sum_{\omega \in \Omega} p_\omega = \mathbb{P}(\Omega) = 1.$$

Définition 8 : Distribution de probabilités

On appelle **distribution de probabilités** sur un ensemble E fini toute famille $(p_x)_{x \in E} \in (\mathbb{R}^+)^E$ telle que $\sum_{x \in E} p_x = 1$.

La réciproque est vraie.

Propriété 6 : Caractérisation de la probabilité par une distribution de probabilité

Si Ω fini et si $(p_\omega)_{\omega \in \Omega}$ est une distribution de probabilité sur Ω (pour tout $\omega \in \Omega$, $p_\omega \geq 0$ tels que $\sum_{\omega \in \Omega} p_\omega = 1$), alors il existe une unique probabilité \mathbb{P} sur Ω telle que $\forall \omega \in \Omega$, $\mathbb{P}(\{\omega\}) = p_\omega$.

Remarque 4

Ainsi, dans la pratique, il suffit de donner la probabilité de chaque événement élémentaire pour définir une probabilité.

Démonstration

Raisonnons par analyse-synthèse :

- **Analyse** : Si \mathbb{P} est une probabilité telle que $\forall \omega \in \Omega$, $\mathbb{P}(\{\omega\}) = p_\omega$, alors, pour tout événement A , $\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} p_\omega$ par additivité d'où l'unicité.
- **Synthèse** : Si on pose P tel que pour tout partie A de Ω , $\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} p_\omega$, alors $\mathbb{P}(A) \geq 0$, $\mathbb{P}(\Omega) = \sum_{\omega \in \Omega} p_\omega = 1$ et si A, B sont incompatibles,

$$\mathbb{P}(A \sqcup B) = \sum_{\omega \in A \sqcup B} p_\omega = \sum_{\omega \in A} p_\omega + \sum_{\omega \in B} p_\omega = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B).$$

Donc P est bien une probabilité. ■

Exercice 3

1. On lance un dé **équilibré**. On note p_i la probabilité de l'événement élémentaire « obtenir i » pour $i \in \llbracket 1, 6 \rrbracket$. Déterminer p_i pour tout i et la probabilité de l'événement A « obtenir un nombre pair ». Pour tout i $p_i = \frac{1}{6}$ et, avec $A = \{2, 4, 6\}$, $\mathbb{P}(A) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.
2. On lance un dé **truqué**, on note p_i la probabilité de l'événement élémentaire « obtenir i » pour $i \in \llbracket 1, 6 \rrbracket$. Avec $p_1 = p_2 = p_3 = \frac{1}{12}$ et $p_4 = p_5 = p_6 = \frac{1}{4}$, $\mathbb{P}(A) = \frac{7}{12}$.
3. Même question si $p_i = C \cdot i$ avec C fixé.

Exercice 4 : Formule de Poincaré

On retrouve la formule en utilisant les événements élémentaires :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) = \sum_{\omega \in \bigcup_{i=1}^n A_i} p_\omega$$

Soit p le nombre d'ensembles parmi A_1, \dots, A_n contenant ω . Calculer le coefficient de p_ω dans le membre de

droite de la formule :

$$\sum_{k=1}^n \left((-1)^{k-1} \sum_{\substack{I \subset \llbracket 1, n \rrbracket \\ |I|=k}} \mathbb{P} \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) \right)$$

et la retrouver. Or $\omega \in \bigcap_{i \in I} A_i$ lorsque I ne contient que des indices des ensembles contenant ω : il y a $\binom{p}{k}$ possibilités pour I de cardinal k (donc 0 si $k > p$ ou $p = 0$).

Le coefficient de p_ω dans cette somme est donc

$$\sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \binom{p}{k} = - \left(\sum_{k=0}^p (-1)^k \binom{p}{k} - 1 \right) = 1 - 0^p = \begin{cases} 1 & \text{si } p \geq 1 \text{ ie si } \omega \in \bigcup A_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Finalement,

$$\sum_{k=1}^n \left((-1)^{k-1} \sum_{\substack{I \subset \llbracket 1, n \rrbracket \\ |I|=k}} \mathbb{P} \left(\bigcap_{i \in I} A_i \right) \right) = \sum_{p_\omega \in \bigcup A_i} p_\omega = \mathbb{P} \left(\bigcup A_i \right).$$

Remarquons qu'on retrouve la formule du crible pour les cardinaux en prenant la probabilité uniforme.

4 Probabilité uniforme

Définition 9 : Probabilité uniforme

Soit Ω un ensemble fini. L'unique probabilité telle que tous les événements élémentaires soient équiprobables est appelée **probabilité uniforme**.

Propriété 7 : Expression de la probabilité uniforme

Soit Ω un ensemble fini muni de la probabilité uniforme \mathbb{P} . Alors

(i) Pour tout $\omega \in \Omega$, $p_\omega = \mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{|\Omega|}$.

(ii) Pour tout événement A , $\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$.

Remarque 5

Quand on parle de choix « au hasard » sur un ensemble fini, on sous-entend souvent que ce choix est fait avec la probabilité uniforme : chaque élément a les mêmes chances d'être choisi.

Exemple 7

Lancer de dés non truqués, tirages de boules semblables dans une urne, lancer de pièces, etc.

Exercice 5

Dans un jeu de 52 cartes, on en tire 5. Modéliser l'expérience et calculer la probabilité des événements A : « Avoir exactement trois carreaux » et B : « Avoir au moins une paire ». Univers : $\Omega = \mathcal{P}_5(C)$ où C est l'ensemble des cartes, probabilité uniforme. $|\Omega| = \binom{52}{5}$. $\mathbb{P}(A) = \frac{\binom{13}{3} \binom{39}{2}}{\binom{52}{5}} \approx 8 \%$, $\mathbb{P}(B) = 1 - \frac{\binom{13}{5} \cdot 4^5}{\binom{52}{5}} \approx 49 \%$.

Exercice 6

Calculer la probabilité d'avoir k fois le chiffre 6 dans un lancer de n dés équilibrés.

Univers $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}^n$, muni de la probabilité uniforme,

$$A_k = \{(k_1, \dots, k_n) \mid 6 \text{ apparaît exactement } k \text{ fois}\}$$



$$|A_k| = \binom{n}{k} 5^{n-k} \text{ et } |\Omega| = 6^n, \text{ donc } \mathbb{P}(A_k) = \binom{n}{k} \frac{5^{n-k}}{6^n}.$$

Si $n = 6$, probabilité d'obtenir tous les chiffres de 1 à 6 ? $\frac{6!}{6^6} \approx 1,5 \%$.

Exercice 7

On vérifie sur un exemple qu'un tirage simultané ou qu'un tirage sans remise donnent, pour des événements ne faisant pas intervenir l'ordre, les mêmes résultats pour la probabilité uniforme.

On considère une urne contenant 5 boules blanches, 4 boules noires et 3 boules bleues. On tire trois boules. Déterminer la probabilité des événements A « Les trois boules sont de la même couleur. » et B « Il y a une boule de chaque couleur. » Calculer les probabilités des événements A et B si on suppose que les boules sont tirées :

1. **simultanément**, $\Omega = \mathcal{P}_3(\mathcal{B})$ où \mathcal{B} est l'ensemble des boules, muni de la probabilité uniforme.

$$|\Omega| = \binom{12}{3} = 220.$$

$$|A| = \binom{5}{3} + \binom{4}{3} + 1 = \binom{5}{2} + \binom{4}{1} + 1 = 15 \text{ donc } \mathbb{P}(A) = \frac{15}{220} = \frac{3}{44} \approx 6,8 \%$$

$$|B| = 5 \times 4 \times 3 = 60 \text{ donc } \mathbb{P}(B) = \frac{60}{220} = \frac{3}{11} \approx 27,3 \%$$

2. **successivement, avec remise**, $\Omega = \mathcal{B}^3$, muni de la probabilité uniforme.

$$|\Omega| = 12^3 = 1728.$$

$$|A| = 5^3 + 4^3 + 3^3 = 216 \text{ donc } \mathbb{P}(A) = \frac{216}{1728} = \frac{1}{8} = 12,5 \%$$

$$|B| = (5 \times 4 \times 3) \times 3! = 360 \text{ donc } \mathbb{P}(B) = \frac{360}{1728} = \frac{5}{24} \approx 20,8 \%$$

3. **successivement, sans remise**. $\Omega = \mathcal{A}_3(\mathcal{B})$, muni de la probabilité uniforme.

$$|\Omega| = A_{12}^3 = 1320.$$

$$|A| = A_5^3 + A_4^3 + A_3^3 = 90 \text{ donc } \mathbb{P}(A) = \frac{90}{1320} = \frac{3}{44}.$$

$$|B| = (5 \times 4 \times 3) \times 3! = 360 \text{ donc } \mathbb{P}(B) = \frac{360}{1320} = \frac{3}{11}.$$

Exercice 8

Un lac contient N poissons dont m malades. On effectue un prélèvement (simultané) de n poissons. Quel est la probabilité d'en avoir exactement k malades ? Sur Ω l'ensemble des poissons muni de la probabilité uniforme, si

A_k est l'événement « obtenir exactement k poissons malades », $\mathbb{P}(A_k) = \frac{\binom{m}{k} \binom{N-m}{n-k}}{\binom{N}{n}}$.

PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

Si (Ω, \mathbb{P}) est un espace probabilisé fini et \mathbb{P} est la probabilité uniforme, et on suppose un événement B (non impossible) réalisé.

Pour connaître la probabilité qu'un événement A se réalise sachant que B est réalisé, on s'intéresse au nombre de cas possibles : $|B|$ et au nombre de cas favorable : $|A \cap B|$.

Cela donne donc comme probabilité $\frac{|A \cap B|}{|B|} = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$.

Généralisons cela à n'importe quelle probabilité.


1 Définition

Définition 10 : Probabilité conditionnelle

Si A et B sont des événements de l'espace probabilisé fini (Ω, \mathbb{P}) et si $\mathbb{P}(B) > 0$, on appelle **probabilité de A sachant B** le réel

$$\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A | B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

Remarques 5

- R1 – $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A | B)$ représente la probabilité de A du point de vue d'un observateur qui arriverait en cours d'expérience, au moment où B vient de se réaliser. Il ne faut surtout pas la confondre avec $\mathbb{P}(A \cap B)$ correspondant à la probabilité que A et B soient réalisés simultanément.
- R2 –  En général, « $A | B$ » **n'est pas un événement** (c'est-à-dire une partie de Ω) ! La notation $\mathbb{P}(A | B)$ peut se révéler dangereuse si on ne fait pas attention.
- R3 – Si A et B sont incompatibles, $\mathbb{P}(A | B) = \mathbb{P}(B | A) = 0$.

Exercice 9

On considère une famille de deux enfants. On suppose que chaque enfant a une chance sur deux d'être une fille. On se place donc sur $\Omega = \{F, G\}^2$ avec la probabilité uniforme P (modèle de Bernoulli de paramètre $p = \frac{1}{2}$). Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des filles sachant que l'aîné est une fille ?

Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des filles sachant qu'il y a au moins une fille ? Intuitivement, sachant que l'aîné est une fille, il ne reste que deux possibilités : le deuxième est une fille ou est un garçon. Il y aura donc une chance sur deux. Vérifions :

B : « L'aîné est une fille ». Donc $B = \{F\} \times \{F, G\} = \{(F, G), (F, F)\}$. $\mathbb{P}(B) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$.

A : « Les deux sont des filles ». Donc $A \cap B = A = \{(F, F)\}$. $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{4}$ et $\mathbb{P}(A | B) = \frac{1}{2}$.

C : « Il y a au moins une fille ». $C = \{(F, G), (F, F), (G, F)\}$. Donc $\mathbb{P}(C) = \frac{3}{4}$.

$A \cap C = A$, $\mathbb{P}(A \cap C) = \frac{1}{4}$ et $\mathbb{P}(A | C) = \frac{1}{3}$.

Propriété 8

Soit (Ω, \mathbb{P}) un espace probabilisé fini, B un événement tel que $\mathbb{P}(B) > 0$. Alors l'application

$$\mathbb{P}_B : \begin{cases} \mathcal{P}(\Omega) & \longrightarrow [0, 1] \\ A & \longmapsto \mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A | B) \end{cases}$$

est une probabilité sur Ω .

Démonstration

$\mathbb{P}(A | B) \geq 0$, $\mathbb{P}(\Omega | B) = \frac{\mathbb{P}(B)}{\mathbb{P}(B)} = 1$ et si A et C sont incompatibles,

$$\mathbb{P}(A \cup C | B) = \frac{\mathbb{P}((A \cap B) \cup (C \cap B))}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)} + \frac{\mathbb{P}(C \cap B)}{\mathbb{P}(B)} = \mathbb{P}(A | B) + \mathbb{P}(C | B).$$

Remarque 6

En particulier, toutes les propriétés des probabilités s'appliquent. Par exemple, $\mathbb{P}(\bar{A} | B) = 1 - \mathbb{P}(A | B)$ et

$$\mathbb{P}(A \cup C | B) = \mathbb{P}(A | B) + \mathbb{P}(C | B) - \mathbb{P}(A \cap C | B).$$

Propriété 9

Soit (Ω, \mathbb{P}) un espace probabilisé fini, A, B deux événements.

- Si $\mathbb{P}(B) > 0$, $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A | B) \times \mathbb{P}(B)$
- Si $\mathbb{P}(A) > 0$, $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B | A) \times \mathbb{P}(A)$

**Remarque 7**

Intuitivement, A et B sont réalisés si B est réalisé, puis A est réalisé sachant que B l'était : on retrouve nos réflexes de dénombrement.

Exemple 8

Quelle est la probabilité d'obtenir deux nombres pairs en lançant deux fois un dé à six faces? Sur $\Omega = \llbracket 1, 6 \rrbracket^2$ muni de la probabilité uniforme.

- **Première méthode** : Directement, soit A l'événement « Les deux résultats sont pairs. » Alors $A = \{2, 4, 6\}^2$, donc $\mathbb{P}(A) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$.
- **Deuxième méthode** : Soit B l'événement « le premier résultat est pair » et C l'événement « le deuxième résultat est pair ». Alors $\mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(C | B) = \frac{1}{2}$, donc $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B \cap C) = \frac{1}{4}$.

2

 Formule des probabilités composées

Théorème 1 : Formule des probabilités composées

Soit $n \geq 2$, A_1, \dots, A_n des événements de l'espace probabilisé fini (Ω, \mathbb{P}) tels que $\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0$.

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_2 | A_1) \times \mathbb{P}(A_3 | A_1 \cap A_2) \times \dots \times \mathbb{P}(A_n | A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

Remarque 8

À nouveau, cela correspond à notre intuition : on réalise A_1 , puis A_2 sachant que A_1 l'est, puis A_3 sachant que A_1 et A_2 le sont, etc. On se sert donc en général de cette formule lorsque l'on a des événements successifs, **chronologiques**.

Démonstration

Remarquons que comme pour tout $k < n$, $A_1 \cap \dots \cap A_{n-1} \subset A_1 \cap \dots \cap A_k$, pour tout k , $\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_k) > 0$ et donc tous les termes ont un sens.

$$\mathbb{P}(A_1) \times \prod_{i=1}^{n-1} \mathbb{P}(A_{i+1} | A_1 \cap \dots \cap A_i) = \mathbb{P}(A_1) \times \prod_{i=1}^{n-1} \frac{\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{i+1})}{\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_i)} = \mathbb{P}(A_1) \times \frac{\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n)}{\mathbb{P}(A_1)}$$

car le produit est télescopique. ■

Exercice 10

On tire successivement (et sans remise) 4 cartes d'un jeu de 52 cartes. Quelle est la probabilité de tirer les 4 as?

Sur l'univers $\Omega = \mathcal{A}_4(\mathcal{C})$ où \mathcal{C} est l'ensemble des cartes, muni de la probabilité uniforme. On note A_i l'événement « la i^{e} carte tirée est un as ». On cherche $\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4)$.

$$\mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_2 | A_1) \times \mathbb{P}(A_3 | A_1 \cap A_2) \times \mathbb{P}(A_4 | A_1 \cap A_2 \cap A_3)$$

$$\text{Or } \mathbb{P}(A_1) = \frac{4}{52} = \frac{1}{13}, \mathbb{P}(A_2 | A_1) = \frac{3}{51}, \mathbb{P}(A_3 | A_1 \cap A_2) = \frac{2}{50} \text{ et } \mathbb{P}(A_4 | A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1}{49}.$$

$$\text{Donc } \mathbb{P}(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4) = \frac{4!}{52 \times 51 \times 50 \times 49} \approx 0,0004 \text{ \%}.$$

(On peut aussi obtenir ce résultat par un raisonnement direct!)

3 Formule des probabilités totales

Théorème 2 : Formule des probabilités totales

Si (Ω, \mathbb{P}) est un espace probabilisé fini et A_1, \dots, A_n un système complet d'événements, alors pour tout événement B ,

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(B | A_i) \mathbb{P}(A_i) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) \mathbb{P}_{A_i}(B).$$

avec la convention $\mathbb{P}(B | A_i) \mathbb{P}(A_i) = 0$ lorsque $\mathbb{P}(A_i) = 0$.

Démonstration

Immédiat.

Remarque 9

La formule des probabilités totales est utile lorsque l'on fait une expérience aléatoire en plusieurs étapes. Elle permet de raisonner par disjonction de cas, suivant le résultat de la première étape.

Corollaire 2 : Cas d'un couple sce

Si (Ω, \mathbb{P}) est un espace probabilisé fini et A un événement, alors pour tout événement B ,

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B | A) \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B | \bar{A}) \mathbb{P}(\bar{A})$$

Exercice 11

Une compagnie d'assurance estime que ses clients se divisent en deux catégories : ceux qui ont beaucoup d'accidents (20 %) et ceux qui n'en ont pas beaucoup. Pour la première, la probabilité d'avoir un accident par an est 0,5, pour la seconde cette probabilité est 0,1.

Quelle est la probabilité qu'un nouvel assuré soit victime d'un accident la première année ?

Ω est l'ensemble des assurés. A est l'ensemble des assurés ayant beaucoup d'accidents et B celui des assurés ayant un accident la première année.

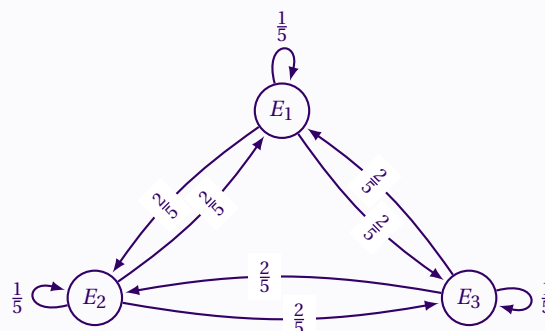
On cherche

$$P(B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B | A) + \mathbb{P}(\bar{A}) \times \mathbb{P}(B | \bar{A}) = 0,2 \times 0,5 + 0,8 \times 0,1 = 0,18 = 18 \%$$

Exercice 12 : Chaîne de Markov

On parle de **processus de Markov** lorsque l'on fait une série d'expériences aléatoires donnant plusieurs états possibles tel que la probabilité de passer dans un autre état ne dépend que de l'état dans lequel on est et non de tous les états par lesquels on est passés (absence de mémoire).

Si, par exemple, on a 3 états possibles E_1, E_2 et E_3 et qu'en étant dans un état donné, on passe à un autre état avec une probabilité $\frac{2}{5}$ et on reste dans le même état avec une probabilité $\frac{1}{5}$, on peut résumer la situation avec un diagramme de transition :



Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit les variables aléatoires X_n prenant comme valeur 1, 2 ou 3 suivant l'état dans lequel on se



trouve après n étapes.

On note pour $i \in \{1, 2, 3\}$, $p_i^{(n)} = \mathbb{P}(X_n = i)$.

Pour tout n , la formule des probabilités totales donne

$$\begin{pmatrix} p_1^{(n+1)} \\ p_2^{(n+1)} \\ p_3^{(n+1)} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} p_1^{(n)} \\ p_2^{(n)} \\ p_3^{(n)} \end{pmatrix}$$

où A^T est appelée **matrice de transition** : $a_{i,j} = \mathbb{P}(E_i | E_j)$ donc $(A^T)_{i,j} = \mathbb{P}(E_j | E_i)$. Ici, $A = A^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$.

La matrice A^T est une matrice dite **stochastique** : les coefficients sont dans $[0, 1]$ et la somme de toutes les lignes vaut 1. (Logique, non ?)

$$\text{On obtient alors } \begin{pmatrix} p_1^{(n)} \\ p_2^{(n)} \\ p_3^{(n)} \end{pmatrix} = A^n \begin{pmatrix} p_1^{(0)} \\ p_2^{(0)} \\ p_3^{(0)} \end{pmatrix}.$$

Si A^n a une limite, on peut même obtenir la probabilité asymptotique d'être dans l'un des trois états (on trouve $1/3$ pour les trois, ici, quel que soit l'état de départ.).

Exercice 13

Un laboratoire pharmaceutique réalise un test clinique à partir d'un médicament et d'un placebo. Voici les résultats :

	Guéris	Non guéris
Hommes		
Médicament	18	12
Placebo	7	3
Femmes		
Médicament	2	8
Placebo	9	21

Soient H l'événement « la personne est un homme », M l'événement « la personne a pris le médicament » et G l'événement « la personne est guérie. »

Calculer la probabilité d'être guéri sachant qu'on ait pris ou non le médicament pour les hommes, pour les femmes, puis pour tout le monde.

$$\mathbb{P}(G | M \cap H) = \frac{18}{30} = 60 \% \text{ et } \mathbb{P}(G | \overline{M} \cap H) = \frac{7}{10} = 70 \%.$$

$$\mathbb{P}(G | M \cap \overline{H}) = \frac{2}{10} = 20 \% \text{ et } \mathbb{P}(G | \overline{M} \cap \overline{H}) = \frac{9}{30} = 30 \%.$$

$$\mathbb{P}(G | M) = \frac{20}{40} = 50 \% \text{ et } \mathbb{P}(G | \overline{M}) = \frac{16}{40} = 40 \%.$$

Si on extrapole à toute la population, que deviennent ces dernières probabilités ? Pour toute la population,

$$\mathbb{P}(H | M) = \mathbb{P}(H | \overline{M}) = \frac{1}{2}.$$

Alors

$$\mathbb{P}(G | M) = \mathbb{P}(H | M)\mathbb{P}(G | M \cap H) + \mathbb{P}(\overline{H} | M)\mathbb{P}(G | M \cap \overline{H}) = \frac{60 \%}{2} + \frac{20 \%}{2} = 40 \%$$

et

$$\mathbb{P}(G | \overline{M}) = \mathbb{P}(H | \overline{M})\mathbb{P}(G | \overline{M} \cap H) + \mathbb{P}(\overline{H} | \overline{M})\mathbb{P}(G | \overline{M} \cap \overline{H}) = \frac{70 \%}{2} + \frac{30 \%}{2} = 50 \%$$

Conclusion ?

Exercice 14

Soit $p > 0$. Une urne \mathcal{U} contient des jetons numérotés de 1 à p : i jetons portent le numéro i .

On dispose de p urnes numérotées de 1 à p telles que l'urne numéro i contient i boules blanches et $p-i$ boules noires.

On tire un jeton numéro i dans \mathcal{U} puis une boule dans l'urne numéro i . Quelle est la probabilité que la boule soit blanche ?

On se place sur $\Omega = \llbracket 1, p \rrbracket \times \{b, n\}$ muni naturellement de la probabilité \mathbb{P} tel que si on note B l'événement « la boule prélevée est blanche » et J_i l'événement « l'urne choisie est la numéro i », alors $\mathbb{P}(J_i) = \frac{i}{p(p+1)} = \frac{2i}{p(p+1)}$ et

$\mathbb{P}_{J_i}(B) = \frac{i}{p}$ construite à partir des probabilités uniformes.

Les U_i forment un sce dont les probabilités sont non nulles. La formule des probabilités totales s'écrit :

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^p \mathbb{P}(J_i) \mathbb{P}(B | J_i) = \sum_{i=1}^p \frac{2i}{p(p+1)} \frac{i}{p} = \frac{2p+1}{3p}.$$

4 Formule de Bayes

On reprend l'expérience précédente : on cherche la probabilité qu'une boule ait été tirée dans l'urne numéro 1 sachant qu'elle est blanche. On cherche donc à « remonter le temps » en quelques sortes.

On utilise pour cela la **formule de probabilité des causes** :

Propriété 10 : Formule de probabilité des causes

Si A, B sont des événements de probabilité non nulle sur l'espace probabilisé (Ω, \mathbb{P}) , alors

$$\mathbb{P}(A | B) = \frac{\mathbb{P}(B | A) \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$$

Démonstration

$$\mathbb{P}(A | B) \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B | A) \mathbb{P}(A).$$

Exercice 15

Calculer, dans l'exercice précédent, la probabilité qu'une boule ait été tirée dans l'urne numéro 1 sachant qu'elle est blanche.

$$\mathbb{P}(J_1 | B) = \frac{\mathbb{P}(B | J_1) \mathbb{P}(J_1)}{\mathbb{P}(B)} = \frac{\frac{2}{p(p+1)} \times \frac{1}{p}}{\frac{2p+1}{3p}} = \frac{6}{p(p+1)(2p+1)}.$$

En remplaçant $\mathbb{P}(B)$ par la formule des probabilités totales, on obtient

$$\mathbb{P}(A | B) = \frac{\mathbb{P}(B | A) \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B | A) \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B | \bar{A}) \mathbb{P}(\bar{A})}$$

Cela se généralise en la **formule de Bayes** :

Théorème 3 : Formule de Bayes

Soit (A_1, \dots, A_n) un système complet d'événements de probabilités non nulles sur l'espace probabilisé (Ω, \mathbb{P}) , B un événement de probabilité non nulle et $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Alors

$$\mathbb{P}(A_j | B) = \frac{\mathbb{P}(B | A_j) \mathbb{P}(A_j)}{\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(B | A_i) \mathbb{P}(A_i)}$$



Démonstration

On applique la propriété précédente à A_j et B et on utilise la formule des probabilités totales. ■

Exercice 16

Une certaine maladie affecte une personne sur dix mille.

On dispose d'un test sanguin qui détecte cette maladie avec une fiabilité de 99 % lorsqu'elle est effectivement présente.

Cependant, on obtient un résultat faussement positif pour 0,1 % des personnes saines testées.

Quelle est la probabilité qu'une personne soit réellement malade sachant qu'elle a été testée positive ? Commenter.

Sur Ω l'ensemble des personnes testées, avec la probabilité uniforme. Soit M l'événement « la personne est malade » et T l'événement « le test est positif ».

D'après les informations dont on dispose, $\mathbb{P}(T | M) = 0,99$ et $\mathbb{P}(T | \overline{M}) = 10^{-3}$, $\mathbb{P}(M) = 10^{-4}$. Donc

$$\mathbb{P}(M | T) = \frac{\mathbb{P}(T | M)\mathbb{P}(M)}{\mathbb{P}(T | M)\mathbb{P}(M) + \mathbb{P}(T | \overline{M})\mathbb{P}(\overline{M})} = \frac{0,99 \cdot 10^{-5}}{0,99 \cdot 10^{-4} + (1 - 10^{-4})10^{-3}} \approx 9 \%$$

Cela est dû au fait que il est rare que le test soit positif (le dénominateur vaut $\mathbb{P}(T)$) mais très très rare que l'on ait un malade ($\mathbb{P}(M)$ est très petit devant $\mathbb{P}(T)$). Proportionnellement, il y a beaucoup plus de non malades testés positifs.

Exercice 17

Dans un célèbre jeu américain des années 70, un candidat devait choisir une porte parmi trois sachant que derrière ces portes étaient dissimulées deux chèvres et une Ferrari.

Une fois le choix effectué, l'animateur qui sait où est la Ferrari ouvre l'une des portes non choisies par le candidat, derrière laquelle il y a une chèvre.

Il propose ensuite au candidat de changer de porte.

A-t-il intérêt à le faire ?

Soit F_i l'événement « La Ferrari est derrière la porte numéro i ».

Supposons par exemple, que le candidat ait choisi la porte 1.

On a $\mathbb{P}(F_1) = \mathbb{P}(F_2) = \mathbb{P}(F_3) = \frac{1}{3}$. (F_1, F_2, F_3) est un système complet d'événements.

Soit A l'événement « l'animateur ouvre la porte numéro 3 ».

On cherche $\mathbb{P}(F_2 | A)$ pour savoir si le candidat a intérêt à changer de porte. (Si l'animateur ouvre la porte 2, le raisonnement est le même).

D'après la formule de Bayes,

$$\mathbb{P}(F_2 | A) = \frac{\mathbb{P}(A | F_2)\mathbb{P}(F_2)}{\mathbb{P}(A | F_1)\mathbb{P}(F_1) + \mathbb{P}(A | F_2)\mathbb{P}(F_2) + \mathbb{P}(A | F_3)\mathbb{P}(F_3)}$$

Or

- $\mathbb{P}(A | F_1) = \frac{1}{2}$ car les deux portes restantes contiennent une chèvre.
- $\mathbb{P}(A | F_2) = 1$ car si la Ferrari est derrière la deuxième porte, l'animateur ne peut ouvrir que la troisième porte.
- $\mathbb{P}(A | F_3) = 0$ car l'animateur ne dévoile pas la Ferrari.

Finalement, on trouve $\mathbb{P}(F_2 | A) = \frac{2}{3}$ et le candidat a deux fois plus de chances de gagner en changeant de porte qu'en la gardant.

En y réfléchissant bien, si on décide de changer de porte, on a au départ 2 chances de gagner (les portes où il y a les chèvres) et 1 de perdre, alors que si on décide de ne pas changer de portes, on a au départ 2 chances de perdre et 1 de gagner !

IV LOI D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE

1 Généralités

Définition 11 : Loi d'une variable aléatoire

Soit X variable aléatoire sur l'espace probabilisé (Ω, \mathbb{P}) . On appelle **loi de X** l'application

$$\mathbb{P}_X : \begin{cases} \mathcal{P}(X(\Omega)) & \longrightarrow [0, 1] \\ A & \longrightarrow \mathbb{P}(X \in A) \end{cases}$$

Propriété 11 : La loi d'une VA est une probabilité

La loi \mathbb{P}_X de la variable aléatoire X est une probabilité sur $X(\Omega)$.
Ainsi, $(X(\Omega), \mathbb{P}_X)$ est un espace probabilisé.

Remarque 10

Sans connaître explicitement Ω , le seul fait que $X(\Omega)$ soit fini permet d'utiliser nos connaissances sur les probabilités sur des univers finis avec la probabilité \mathbb{P}_X .

Propriété 12 : Événements élémentaires

Si X variable aléatoire sur Ω , la loi de X est entièrement déterminée par la donnée des $\mathbb{P}_X(\{x\}) = \mathbb{P}(X = x)$ pour $x \in X(\Omega)$: ils forment une distribution de probabilités.
Plus précisément, on a pour tout $A \subset X(\Omega)$,

$$\mathbb{P}_X(A) = \sum_{x \in A} \mathbb{P}(X = x).$$

Démonstration

$((X = x))_{x \in X(\Omega)}$ est un système complet d'événements. ■

Exemple 9

On effectue n lancers de pièce équilibrée, on note X la variable aléatoire du nombre de pile obtenus. Alors \mathbb{P}_X est déterminée par $\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}$.

Remarque 11

Des variables aléatoires différentes peuvent suivre une même loi : par exemple X le nombre de pile et Y le nombre de face.

2 Quelques lois usuelles

X désigne une variable aléatoire sur un espace probabilisé fini (Ω, \mathbb{P}) .



a Loi uniforme

Définition 12 : Loi uniforme

On dit que X suit une **loi uniforme** lorsque pour tout $x \in X(\Omega)$,

$$\mathbb{P}_X(\{x\}) = \mathbb{P}(X = x) = \frac{1}{n}$$

où $n = |X(\Omega)|$, c'est-à-dire que pour tout $A \subset X(\Omega)$,

$$\mathbb{P}_X(A) = \frac{|A|}{n}.$$

On note alors $X \sim \mathcal{U}(n)$.

Exemple 10

Si on tire un dé à n faces ou si on tire une boule dans une urne qui en contient n (numérotée), alors la variable aléatoire du résultat suit $\mathcal{U}(n)$.

Remarque 12

⚠ cela ne concerne pas de la probabilité \mathbb{P} initiale : \mathbb{P}_X peut être uniforme sans que \mathbb{P} le soit.

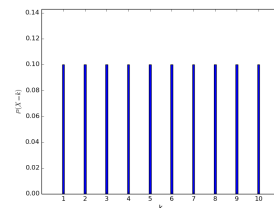


FIGURE 1 – Loi $\mathcal{U}(10)$

Exemple 11

On lance un dé à 6 faces truqué tel que l'on obtient 1 ou 6 avec une probabilité $1/4$ et 2,3,4 ou 5 avec probabilité $1/8$, X variable aléatoire $\mathbb{1}_{2\mathbb{N}}$, alors $\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(X = 1) = 1/2$ donc $X \sim \mathcal{U}(2)$ alors que \mathbb{P} n'est pas la probabilité uniforme.

b Loi de Bernoulli

Définition 13 : Loi de Bernoulli

On dit que X suit une **loi de Bernoulli de paramètre** $p \in [0, 1]$ lorsque $X(\Omega) \subset \{0, 1\}$, $\mathbb{P}(X = 1) = p$ et $\mathbb{P}(X = 0) = q = 1 - p$.

On note alors $X \sim \mathcal{B}(p)$.

Exemple 12

Situation type : Variable aléatoire étudiant le succès (1) d'un événement donné ou son échec (0).

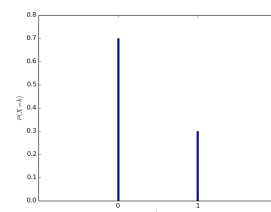


FIGURE 2 – Loi $\mathcal{B}(0.3)$

Propriété 13

Les variables aléatoires qui suivent une loi de Bernoulli de paramètre p sont exactement les fonctions indicatrices des parties F de Ω telles que $\mathbb{P}(F) = p$.

Démonstration

Si X suit une loi de Bernoulli de paramètre p , alors si $F = (X = 1)$, $X = \mathbb{1}_F$.
Réciproquement, si $X = \mathbb{1}_F$, $X(\Omega) \subset \{0, 1\}$ et $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(F)$.

C Loi binomiale

On a déjà vu que lors de la répétition de n expériences de Bernoulli indépendantes, la probabilité d'avoir $k \leq n$ succès s'écrit $\binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$ où p est la probabilité d'un succès.

Si on appelle X la variable aléatoire du nombre de succès, à valeurs dans $\llbracket 0, n \rrbracket$, alors elle suit la loi donnée par

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Remarquons que l'on peut écrire $X = X_1 + \dots + X_n$ où X_i est la variable aléatoire de Bernoulli succès à la i^{e} répétition.

Définition 14 : Loi binomiale

On dit que X suit une **loi binomiale de paramètre** (n, p) où $p \in [0, 1]$ lorsque $X(\Omega) \subset \llbracket 0, n \rrbracket$ et pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$,

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

avec $q = 1 - p$. On note alors $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.

Remarques 6

- R1 – $\mathcal{B}(1, p) = \mathcal{B}(p)$.
- R2 – La formule du binôme redonne (ou se retrouve par)

$$\sum_{k=0}^n \mathbb{P}(X = k) = 1.$$

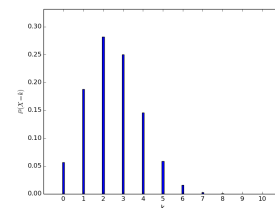


FIGURE 3 – Loi $\mathcal{B}(10, 1/4)$

Exemples 3

- E1 – Situations types :
 - Nombre de succès dans la répétition de n épreuves de Bernoulli indépendantes.
 - Tirage avec remise de n boules dans une urne contenant b boules blanches et r boules rouges. Si $p = \frac{b}{b+r}$ et X le nombre de boules blanches tirées, alors $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.
- E2 – Dans le cas d'un tirage simultané ou successif sans remise, on obtient une variable aléatoire de loi hypergéométrique :

$$\mathbb{P}(X = k) = \frac{\binom{b}{k} \binom{r}{n-k}}{\binom{b+r}{n}}.$$

Exercice 18

Si $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ alors $Y = n - X \sim \mathcal{B}(n, q)$.

V OPÉRATIONS SUR LES VARIABLES ALÉATOIRES

1 Fonction d'une variable aléatoire



Les variables aléatoires réelles étant des applications de \mathbb{R}^Ω qui a une structure d’algèbre, on peut en faire des combinaisons linéaires ou des produits.

On peut aussi les composer par d’autres fonctions :

Définition 15 : Fonction d’une variable aléatoire

Soit X une variable aléatoire sur Ω et f un application définie sur $X(\Omega)$. Alors $f \circ X$ est une variable aléatoire notée $f(X)$.

Propriété 14 : Détermination de la loi de $f(X)$

La loi de $Y = f(X)$ est donnée par

$$\forall y \in f(X(\Omega)), \mathbb{P}(Y = y) = \mathbb{P}(f(X) = y) = \mathbb{P}(X \in f^{-1}(\{y\})) = \sum_{x \mid f(x)=y} \mathbb{P}(X = x).$$

Démonstration

$(f \circ X)(\omega) = y \iff \exists x \in X(\Omega), f(x) = y \text{ et } X(\omega) = x$ c’est-à-dire

$$(f(X) = y) = \bigsqcup_{x \mid f(x)=y} (X = x). \blacksquare$$

Exemples 4

E1 – $f(x) = ax + b$ avec $a \neq 0$, $X(\Omega) = \{x_1, \dots, x_n\}$, $Y = aX + b$ et $Y(\Omega) = \{y_1, \dots, y_n\}$ où $y_i = ax_i + b$, alors $\mathbb{P}(Y = y_i) = \mathbb{P}(aX + b = ax_i + b) = \mathbb{P}(X = x_i)$.

E2 – $f(x) = x^2$, $X(\Omega) = \llbracket -n, n \rrbracket$ et $Y(\Omega) = \{k^2, k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}$, $\mathbb{P}(Y = 0) = \mathbb{P}(X = 0)$ et si $k \neq 0$, $\mathbb{P}(Y = k^2) = \mathbb{P}(X = k) + \mathbb{P}(X = -k)$.

De la même manière, on obtient par exemple :

Propriété 15

Si X et Y sont des variables aléatoires,

$$\mathbb{P}(X + Y = z) = \sum_{x,y \mid x+y=z} \mathbb{P}(X = x, Y = y)$$

$$\mathbb{P}(XY = z) = \sum_{x,y \mid xy=z} \mathbb{P}(X = x, Y = y)$$

2 Couples de variables aléatoires

a Définitions

Définition 16 : Couple de variables aléatoires

Soit Ω fini, X, Y variables aléatoires sur Ω à valeurs dans E, E' . L’application

$$(X, Y) : \begin{cases} \Omega & \longrightarrow & E \times E' \\ \omega & \longrightarrow & (X(\omega), Y(\omega)) \end{cases}$$

est une variable aléatoire appelé **couple** (X, Y) .

Remarque 13

$(X, Y)(\Omega) \subset X(\Omega) \times Y(\Omega)$ et il n'y a pas égalité en général.

Propriété 16 : sce associé à un couple de va

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires sur un univers fini Ω . Alors la famille d'événements $\left((X, Y) = (x, y) \right)_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)}$ est un système complet d'événements appelé **système complet d'événements associé au couple** (X, Y) .

Démonstration

Les événements sont bien disjoints et

$$\bigcup_{x,y} ((X = x) \cap (Y = y)) = \Omega$$

car tout $\omega \in (X = X(\omega)) \cap (Y = Y(\omega))$.

Remarque 14

On note indifféremment $((X, Y) = (x, y))$ ou $(X = x) \cap (Y = y)$ ou $(X = x \text{ et } Y = y)$ ou $(X = x, Y = y)$ ces événements.

b

Lois conjointe et marginales

Définition 17 : Loi conjointe

Soit (X, Y) un couple de variable aléatoires. On appelle **loi conjointe** de (X, Y) la loi $\mathbb{P}_{(X,Y)}$ de la variable aléatoire (X, Y) .

Remarque 15

Vu la propriété précédente, cette loi est déterminée par $\mathbb{P}(X = x, Y = y)$ pour $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$ et peut être représentée dans un tableau à double entrée.

Exemple 13

On lance deux dés, X est la v.a. égale au plus grand des nombres, Y celle du plus petit. On pose $\Omega = \llbracket 1, 6 \rrbracket^2$ muni de la probabilité uniforme. On obtient :

	Y							
X \		1	2	3	4	5	6	loi de X
1		1/36	0	0	0	0	0	1/36
2		1/18	1/36	0	0	0	0	1/12
3		1/18	1/18	1/36	0	0	0	5/36
4		1/18	1/18	1/18	1/36	0	0	7/36
5		1/18	1/18	1/18	1/18	1/36	0	9/36
6		1/18	1/18	1/18	1/18	1/18	1/36	11/36
loi de Y		11/36	9/12	7/36	5/36	3/36	1/36	(1)

Remarquons qu'on obtient la loi de X en sommant les lignes et celle de Y en sommant les colonnes.



Définition 18 : Lois marginales

Si (X, Y) est un couple de variables aléatoires, les lois de X et de Y sont appelées **première et seconde lois marginales du couple**.

Propriété 17

La loi conjointe de (X, Y) détermine les lois marginales de (X, Y) mais la réciproque est fausse.

Démonstration

$$P(X = x) = P\left(\bigcup_y ((X, Y) = (x, y))\right) = \sum_y P(X = x, Y = y). \text{ Idem pour } Y.$$

Contre-exemple :

	Y		
	0	1	loi de X
X			
0	1/2	0	1/2
1	0	1/2	1/2
loi de Y	1/2	1/2	(1)

	Y		
	0	1	loi de X
X			
0	1/4	1/4	1/2
1	1/4	1/4	1/2
loi de Y	1/2	1/2	(1)

C Loi conditionnelle

Définition 19 : Loi conditionnelle

Soit (X, Y) un couple de variables aléatoires. Pour tout $x \in X(\Omega)$ tel que $P(X = x) \neq 0$, la **loi conditionnelle de Y sachant $(X = x)$** est la loi de Y pour la probabilité conditionnelle $P_{(X=x)}$. Elle est donc déterminée par, pour tout $y \in Y(\Omega)$,

$$P(Y = y | X = x) = \frac{P(X = x, Y = y)}{P(X = x)}.$$

Remarque 16

Les lois conditionnelles de Y sachant $(X = x)$ et la loi de X permettent de déterminer la loi conjointe de (X, Y) :

- Soit $P(X = x) = 0$ et alors $P(X = x, Y = y) \leq P(X = x) = 0$ donc $P(X = x, Y = y) = 0$,
- soit $P(X = x) \neq 0$ et $P(X = x, Y = y) = P(Y = y | X = x)P(X = x)$.

Exemple 14

Lois conditionnelles de Y :

	Y	
	0	1
sachant X=		
0	1/4	3/4
1	2/3	1/3

Loi conjointe de (X, Y) :

	Y		
	0	1	loi de X
X			
0	1/10	3/10	2/5
1	2/5	1/5	3/5
loi de Y	1/2	1/2	(1)

3 Extension aux n -uplets

Définition 20 : n -uplets de variables aléatoires

Soit (X_1, \dots, X_n) un n -uplet de variables aléatoires.

La **loi conjointe** de (X_1, \dots, X_n) est déterminée par les $\mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)$ où pour tout $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $x_i \in X_i(\Omega)$. Les lois de X_1, \dots, X_n sont les **lois marginales** de (X_1, \dots, X_n) .

Définition 21 : Loi conditionnelle pour n variables

Si x_1, \dots, x_{n-1} sont fixés, tel que $\mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}) > 0$, la **loi conditionnelle** de X_n sachant $(X_1 = x_1, \dots, X_{n-1} = x_{n-1})$ est déterminée par

$$\mathbb{P}(X_n = x_n \mid X_1 = x_1, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}) = \frac{\mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)}{\mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_{n-1} = x_{n-1})}$$

pour tout x_n .

Remarque 17

Lorsque l'on a la propriété $\mathbb{P}(X_{i+1} = x_{i+1} \mid X_1 = x_1, \dots, X_i = x_i) = \mathbb{P}(X_{i+1} = x_{i+1} \mid X_i = x_i)$ (phénomène sans mémoire), on dit que la famille (X_1, \dots, X_n) de variables aléatoires est **markovienne**.

VI INDÉPENDANCE

1 Couple d'événements indépendants

Motivation : On réalise deux fois une expérience aléatoire aux résultats équiprobables (par exemple un lancer de dé à 6 faces équilibré) et on s'intéresse aux résultats. On modélise naturellement le phénomène avec, comme univers, $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$ (où $\Omega_1 = \Omega_2 = \llbracket 1, 6 \rrbracket$ dans l'exemple), muni de la probabilité uniforme.

On considère un événement A relatif au premier jet uniquement, il est de la forme $A = A_1 \times \Omega_2$, et un événement B relatif au second jet uniquement, il est de la forme $B = \Omega_1 \times B_2$.

Il n'y a aucun lien entre les deux événements, ils sont *indépendants*.

On a facilement

$$\mathbb{P}(A) = \frac{|A_1|}{|\Omega_1|} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(B) = \frac{|B_2|}{|\Omega_2|}.$$

Calculons la probabilité que l'événement A et B se réalise :

$$A \cap B = A_1 \times B_2$$

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{|A_1| |B_2|}{|\Omega_1| |\Omega_2|}.$$

On remarque qu'alors $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$.

Définition 22 : Indépendance de deux événements

Deux événements A et B d'un espace probabilisé fini (Ω, \mathbb{P}) sont dits **indépendants** lorsque

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B).$$

On note $A \perp B$ lorsque A et B sont indépendants.

Remarque 18


Si B est de probabilité nulle, alors B est indépendant de tout autre événement A .



Propriété 18 : Indépendance et probabilités conditionnelles

Deux événements A et B d'un espace probabilisé fini (Ω, \mathbb{P}) tels que $\mathbb{P}(B) > 0$ sont **indépendants** si et seulement si $\mathbb{P}(A | B) = \mathbb{P}(A)$.

Remarques 7

- R1 – Cela traduit bien notre intuition : que B soit réalisé ou non, la probabilité de A ne change pas.
- R2 – Bien sûr, si $\mathbb{P}(A) > 0$, cela s'écrit aussi $\mathbb{P}(B | A) = \mathbb{P}(B)$.
- R3 –  Ne pas confondre l'indépendance de deux événements et le fait qu'ils soient incompatibles. Ces notions s'excluent en général. En effet, si A et B sont incompatibles, $A \cap B = \emptyset$, donc $\mathbb{P}(A \cap B) = 0$. Si A et B sont de probabilité non nulle, ils ne sont pas indépendants. (Ce qui se comprend car $A \subset \bar{B}$ par exemple).
- R4 – Contrairement à l'incompatibilité qui est une notion *ensembliste*, l'indépendance est une notion *probabiliste* : elle dépend de la probabilité dont est muni Ω .

Exercice 19

On lance une pièce deux fois et on choisit $\Omega = \{P, F\}^2 = \{(P, P), (P, F), (F, P), (F, F)\}$. On considère les événements A « les deux lancers ne donnent pas le même résultat » et B « le deuxième lancer donne face ».

Étudier l'indépendance de A et B dans le cas où la pièce est équilibrée puis dans le cas où la pièce tombe sur pile avec une probabilité de $p_P = \frac{3}{4}$ et sur face avec une probabilité de $p_F = \frac{1}{4}$ et qu'on pose $\mathbb{P}(\{(X, Y)\}) = p_X p_Y$ (ce qui revient à considérer raisonnablement que les deux lancers sont indépendants).

- Si la pièce est équilibrée, \mathbb{P} probabilité uniforme, $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \frac{1}{2}$, $\mathbb{P}(A \cap B) = \frac{1}{4}$: A et B sont indépendants.
- Si la pièce tombe sur pile avec une probabilité de $p_P = \frac{3}{4}$ et sur face avec une probabilité de $p_F = \frac{1}{4}$ et qu'on pose $\mathbb{P}(\{(X, Y)\}) = p_X p_Y$ (ce qui revient à considérer raisonnablement que les deux lancers sont indépendants),

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(\{(P, F)\}) + \mathbb{P}(\{(F, P)\}) = \frac{3}{8}$$

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(\{(F, F)\}) + \mathbb{P}(\{(P, F)\}) = \frac{1}{4}$$

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(\{(P, F)\}) = \frac{3}{16} \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B)$$

Donc A et B ne sont pas indépendants.

Remarque 19

Il n'est pas toujours facile de prédire si deux événements sont indépendants (sauf si on a construit l'espace probabilisé pour qu'ils le soient.)

Naturellement, si deux événements sont indépendants, leurs complémentaires le sont. Plus précisément :

Propriété 19 : Indépendance et événement contraire

Si deux événements A et B d'un espace probabilisé fini (Ω, \mathbb{P}) sont indépendants, alors

- A et \bar{B} sont indépendants,
- \bar{A} et B sont indépendants,
- \bar{A} et \bar{B} sont indépendants.

Démonstration

- $\mathbb{P}(A \cap \bar{B}) = \mathbb{P}(A) - \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A)(1 - \mathbb{P}(B)) = \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(\bar{B})$.
- Idem.
- d'après les deux premières.

Remarque 20

Si A, B sont indépendants et A, C aussi, on ne peut rien dire en général de A et $B \cap C$ et de A et $B \cup C$.

Exercice 20

On lance deux dés équilibrés et on considère les événements A « le premier dé amène un nombre pair », B « le second dé amène un nombre pair » et C « les deux dés amènent des nombres de même parité ».

Montrer que A, B, C sont deux à deux indépendants mais que A n'est indépendant ni de $B \cap C$, ni de $B \cup C$. $\Omega = \llbracket 1, 6 \rrbracket^2$, probabilité uniforme.

$$\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(C) = \frac{1}{2}, \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B \cap C) = \mathbb{P}(A \cap C) = \frac{1}{4},$$

$$\mathbb{P}(A \cap B \cap C) = \mathbb{P}(B \cap C) = \frac{1}{4} \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B \cap C).$$

$$\mathbb{P}(B \cup C) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{3}{4},$$

$$\mathbb{P}(A \cap (B \cup C)) = \mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B \cap C) = \frac{1}{4} \neq \mathbb{P}(A)\mathbb{P}(B \cup C).$$

2 Famille d'événements indépendants

Définition 23 : Famille d'événements indépendants

Soit (A_1, A_2, \dots, A_n) une famille d'événements de l'espace probabilisé fini (Ω, \mathbb{P}) .

- A_1, A_2, \dots, A_n sont dit **deux à deux indépendants** lorsque pour tout $i \neq j$, A_i et A_j sont indépendants, c'est-à-dire que $\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j)$.
- A_1, A_2, \dots, A_n sont dit **indépendants**, ou **mutuellement indépendants**, lorsque pour toute partie non vide I de $\llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i).$$

Propriété 20

Si A_1, A_2, \dots, A_n sont indépendants, alors ils sont deux à deux indépendants. La réciproque est fautive si $n \geq 3$.

Démonstration

Prendre $|I| = 2$.

Dans l'exemple précédent, A, B, C sont deux à deux indépendants mais ne sont pas mutuellement indépendants. ■

Remarques 8

R1 – C'est une propriété très forte : elle demande de vérifier $2^n - n - 1$ conditions ! En général, les espaces probabilisés sont construits pour avoir des événements mutuellement indépendants et on n'a donc pas à le vérifier à la main.

R2 – L'indépendance mutuelle est stable par extraction de sous-familles.

R3 – Attention c'est l'inverse des nombres premiers entre eux :

$$\text{mutuellement} \Rightarrow \text{deux à deux.}$$

R4 – Si les événements A_i sont deux à deux indépendants et si pour tout i on pose $B_i = A_i$ ou \bar{A}_i , alors les B_i sont deux à deux indépendants d'après la propriété vue précédemment. Cela se généralise aux événements mutuellement indépendants :



Propriété 21

Si les événements A_1, \dots, A_n sont mutuellement indépendants et si pour tout i on pose $B_i = A_i$ ou $\overline{A_i}$, alors les B_i sont mutuellement indépendants.

Démonstration

On suppose que $B_k = \overline{A_k}$ et si $i \neq k$, $B_i = A_i$ (il n'y a qu'un complémentaire).
Alors, si I est une partie non vide de $\llbracket 1, n \rrbracket$,

- Soit $k \notin I$, $\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} B_i\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(B_i)$.
- Si $k \in I$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} B_i\right) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I \setminus \{k\}} A_i \cap \overline{A_k}\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I \setminus \{k\}} A_i\right) - \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I \setminus \{k\}} \mathbb{P}(A_i) - \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i) \\ &= (1 - \mathbb{P}(A_k)) \prod_{i \in I \setminus \{k\}} \mathbb{P}(A_i) = \mathbb{P}(\overline{A_k}) \prod_{i \in I \setminus \{k\}} \mathbb{P}(A_i) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(B_i). \end{aligned}$$

Puis récurrence sur le nombre de complémentaires. ■

Exercice 21

Si A_1, \dots, A_n sont mutuellement indépendants, $1 \leq p \leq n-1$, Montrer que les événements suivants sont indépendants :

- $\bigcap_{i=1}^p A_i$ et $\bigcap_{i=p+1}^n A_i$,
- $\bigcup_{i=1}^p A_i$ et $\bigcap_{i=p+1}^n A_i$.
- $\bigcup_{i=1}^p A_i$ et $\bigcup_{i=p+1}^n A_i$,

Solution :

- Direct,
- $A_1, \dots, A_p, \overline{A_{p+1}}, \dots, \overline{A_n}$ sont mutuellement indépendants, par le premier point, sont indépendants $\bigcap_{i=1}^p A_i$ et $\bigcap_{i=p+1}^n \overline{A_i} = \overline{\bigcup_{i=p+1}^n A_i}$ donc sont indépendants $\bigcap_{i=1}^p A_i$ et $\bigcup_{i=p+1}^n A_i$.
- idem avec $\overline{A_1}, \dots, \overline{A_p}, A_{p+1}, \dots, A_n$.

3 Modélisation d'expériences aléatoires indépendantes

L'indépendance des événements est en général une conséquence de la modélisation choisie. On construit l'espace probabilisé de sorte que deux expériences aléatoires dont les résultats n'ont pas de lien de causalité entre eux (expériences indépendantes) se traduisent par des événements indépendants.

a Cas de deux épreuves successives indépendantes

Par exemple, si on a deux expériences aléatoires modélisées par (Ω_1, \mathbb{P}_1) et (Ω_2, \mathbb{P}_2) , alors on peut modéliser la succession de ces deux expériences par $(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathbb{P})$ avec

$$\mathbb{P}(A_1 \times A_2) = \mathbb{P}(A_1 \times \Omega_2) \mathbb{P}(\Omega_1 \times A_2) = \mathbb{P}_1(A_1) \mathbb{P}_2(A_2)$$

par indépendance des deux épreuves aléatoires.

On montre facilement qu'on définit bien une probabilité sur $\Omega_1 \times \Omega_2$ ainsi, appelée **probabilité produit** tel que

$$\forall (\omega_1, \omega_2) \in \Omega_1 \times \Omega_2, \mathbb{P}(\{(\omega_1, \omega_2)\}) = \mathbb{P}_1(\{\omega_1\}) \mathbb{P}_2(\{\omega_2\}).$$

On a bien $\mathbb{P}(\{(\omega_1, \omega_2)\}) \in [0, 1]$,

$$\sum_{(\omega_1, \omega_2) \in \Omega_1 \times \Omega_2} \mathbb{P}(\{(\omega_1, \omega_2)\}) = 1$$

et

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A_1 \times A_2) &= \sum_{(\omega_1, \omega_2) \in A_1 \times A_2} \mathbb{P}(\{(\omega_1, \omega_2)\}) \\ &= \sum_{(\omega_1, \omega_2) \in A_1 \times A_2} \mathbb{P}_1(\{\omega_1\})\mathbb{P}_2(\{\omega_2\}) \\ &= \mathbb{P}_1(A_1)\mathbb{P}_2(A_2). \end{aligned}$$

b Généralisation

Plus généralement, une succession de n expériences aléatoires indépendantes représentées par des espaces probabilisés (Ω_i, \mathbb{P}_i) , sera modélisée par (Ω, \mathbb{P}) avec $\Omega = \Omega_1 \times \dots \times \Omega_n$ et \mathbb{P} l'unique probabilité telle que

$$\forall (A_1, \dots, A_n) \in \mathcal{P}(\Omega_1) \times \dots \times \mathcal{P}(\Omega_n), \quad \mathbb{P}(A_1 \times \dots \times A_n) = \mathbb{P}_1(A_1) \cdots \mathbb{P}_n(A_n).$$

c Épreuves répétées

En particulier, si c'est la même expérience qui est répétée n fois, modélisée par (Ω_1, \mathbb{P}_1) , alors la suite des n épreuves sera modélisée par (Ω_1^n, \mathbb{P}) avec

$$\forall (A_1, \dots, A_n) \in (\mathcal{P}(\Omega_1))^n, \quad \mathbb{P}(A_1 \times \dots \times A_n) = \mathbb{P}_1(A_1) \cdots \mathbb{P}_1(A_n).$$

En particulier, pour $(\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega_1^n$,

$$\mathbb{P}(\{(\omega_1, \dots, \omega_n)\}) = \mathbb{P}_1(\{\omega_1\}) \cdots \mathbb{P}_1(\{\omega_n\}).$$

L'exemple classique est celui du jeu de pile ou face (ou n'importe qu'elle épreuve à deux issues dite **de Bernoulli**). On répète n fois l'épreuve. Sur $\{0, 1\}$, $\mathbb{P}_1(\{1\}) = p$ et $\mathbb{P}_1(\{0\}) = q = 1 - p$ avec $p \in [0, 1]$, où 1 représente pile et 0 face, par exemple.

La suite de n lancers sera représentée par l'univers $\Omega = \{0, 1\}^n$, muni de la probabilité \mathbb{P} : pour $(\omega_1, \dots, \omega_n) \in \Omega$,

$$\mathbb{P}(\{(\omega_1, \dots, \omega_n)\}) = \mathbb{P}_1(\{\omega_1\}) \cdots \mathbb{P}_1(\{\omega_n\}).$$

Par exemple :

- Probabilité de « on obtient n pile » : p^n
- Probabilité de « on obtient k piles puis $n - k$ faces » : $p^k(1 - p)^{n-k}$
- Probabilité de « on obtient au total k piles et $n - k$ faces » : $\binom{n}{k} p^k(1 - p)^{n-k}$ (loi binomiale).

4 Variables aléatoires indépendantes

a Cas d'un couple de variable

Définition 24 : Indépendance

Soient X, Y deux variables aléatoires sur l'espace probabilisé fini (Ω, \mathbb{P}) .

X et Y sont dites **indépendantes** si pour tout $(A, B) \in \mathcal{P}(X(\Omega)) \times \mathcal{P}(Y(\Omega))$, les événements $(X \in A)$ et $(Y \in B)$ sont indépendants, c'est-à-dire

$$\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A) \mathbb{P}(Y \in B).$$

On note $X \perp Y$.

Propriété 22 : Caractérisation par les événements élémentaires

X et Y sont indépendantes si et seulement si pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, $(X = x)$ et $(Y = y)$ sont indépendants, c'est-à-dire

$$\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x) \mathbb{P}(Y = y).$$



Démonstration

Le sens \Rightarrow est direct.

On suppose que pour tout $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$, $\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y)$.

Soit $(A, B) \in \mathcal{P}(X(\Omega)) \times \mathcal{P}(Y(\Omega))$.

$$\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbb{P}\left(\bigsqcup_{(x,y) \in A \times B} (X = x, Y = y)\right) = \sum_{(x,y) \in A \times B} \mathbb{P}(X = x, Y = y) = \sum_{x \in A} \mathbb{P}(X = x) \sum_{y \in B} \mathbb{P}(Y = y).$$

Remarque 21

Si X et Y sont indépendantes, la donnée des lois marginales de (X, Y) détermine sa loi conjointe.

Exercice 22

Deux variables aléatoires de Bernoulli sont indépendantes si et seulement si $(X = 1)$ et $(Y = 1)$ le sont.

Propriété 23 : Indépendance et lois conditionnelles

Soit (X, Y) couple de variables aléatoires. Il y a équivalence entre

- (i) Les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.
- (ii) Pour tout $y \in Y(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(Y = y) > 0$, la loi de X sachant $(Y = y)$ est la même que la loi de X .
- (iii) Pour tout $x \in X(\Omega)$ tel que $\mathbb{P}(X = x) > 0$, la loi de Y sachant $(X = x)$ est la même que la loi de Y .

Démonstration

Immédiat.

Propriété 24 : Indépendance et fonctions

Si X, Y sont des variables aléatoires indépendantes, f, g définies sur $X(\Omega)$ et $Y(\Omega)$ respectivement, alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.

Démonstration

$(f(X) \in A) = (X \in f^{-1}(A))$ et $(g(Y) \in B) = (Y \in f^{-1}(B))$, ces derniers étant indépendants.

Exemple 15

Si X et Y sont indépendantes, pour tous m, n , X^m et Y^n le sont.

Remarque 22

En reprenant un calcul précédent, on obtient, si X, Y indépendantes,

$$\mathbb{P}(X + Y = z) = \sum_{x, t \mid x+y=z} \mathbb{P}(X = x) \mathbb{P}(Y = y)$$

où l'on peut remplacer $X + Y$ par n'importe quelle fonction de X et Y .

Exercice 23

Si X et Y sont indépendants de loi uniforme sur $\llbracket 1, n \rrbracket$, déterminer les lois de $X + Y$ et de $X - Y$. Si $k \in \llbracket 2, 2n \rrbracket$,

$$\mathbb{P}(X + Y = k) = \sum_{i+j=k} \mathbb{P}(X = i)\mathbb{P}(Y = j) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(X = i)\mathbb{P}(Y = k - i) = \frac{|\{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid k - i \in \llbracket 1, n \rrbracket\}|}{n^2}.$$

Soit $\frac{k-1}{n^2}$ si $k \leq n+1$, $\frac{2n-k+1}{n^2}$ sinon.

Si $k \in \llbracket 1 - n, n - 1 \rrbracket$, on calcule de même $\mathbb{P}(X - Y = k) = \frac{n - |k|}{n^2}$.

b Variables aléatoires mutuellement indépendantes

Définition 25 : Indépendance de plus de deux variables aléatoires

Des variables aléatoires X_1, \dots, X_n sont dites **(mutuellement) indépendantes** lorsque pour toutes parties A_1 de $X_1(\Omega), \dots, A_n$ de $X_n(\Omega)$, les événements $(X_1 \in A_1), \dots, (X_n \in A_n)$ le sont.

Si, de plus, elles ont même loi, on dit que ce sont des **variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées** (va iid).

Propriété 25 : Caractérisation par les événements élémentaires

X_1, \dots, X_n sont indépendantes si et seulement si pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega)$, les événements $(X_1 = x_1), \dots, (X_n = x_n)$ le sont.

Démonstration

Le sens \Rightarrow est direct.

On suppose que pour tout $(x_1, \dots, x_n) \in A_1 \times \dots \times A_n$, les événements $(X_1 = x_1), \dots, (X_n = x_n)$ sont indépendants.

Soit $(A_1, \dots, A_n) \in \mathcal{P}(X_1(\Omega)) \times \dots \times \mathcal{P}(X_n(\Omega))$, $I \subset \llbracket 1, n \rrbracket$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} (X_i \in A_i)\right) &= \mathbb{P}\left(\bigsqcup_{(x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} A_i} \left(\bigcap_{i \in I} (X_i = x_i)\right)\right) \\ &= \sum_{(x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} A_i} \mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} (X_i = x_i)\right) = \sum_{(x_i)_{i \in I} \in \prod_{i \in I} A_i} \left(\prod_{i \in I} \mathbb{P}(X_i = x_i)\right) \\ &= \prod_{i \in I} \left(\sum_{x_i \in A_i} \mathbb{P}(X_i = x_i)\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(X_i \in A_i). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Remarques 9

R1 – n expériences aléatoires indépendantes peuvent être modélisées par n variables aléatoires indépendantes sur le même principe que ce qui a été vu dans la partie 3. Le résultat de la i^{e} expérience est noté X_i et

$$\mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n) = \mathbb{P}(X_1 = x_1) \cdots \mathbb{P}(X_n = x_n).$$

R2 – Comme pour les événements, indépendants \Rightarrow deux à deux indépendants, mais la réciproque est fautive si $n > 2$.

Exercice 24

Si X_1, X_2 va iid de loi $\mathcal{U}(2)$ sur $\{-1, 1\}$. $X_3 = X_1 \times X_2$.

Montrer que X_1, X_2 et X_3 sont indépendantes deux à deux mais pas mutuellement.

$$\mathbb{P}(X_3 = -1) = \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = -1) + \mathbb{P}(X_1 = -1, X_2 = 1) = \frac{1}{2}$$



Donc $X_3 \sim \mathcal{U}(2)$ sur $\{-1, 1\}$.

Alors X_1, X_2, X_3 sont indépendantes deux à deux car $X_1 \perp X_2$,

$$\mathbb{P}(X_1 = 1, X_3 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(X_1 = 1)\mathbb{P}(X_3 = 1)$$

$$\mathbb{P}(X_1 = -1, X_3 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = -1, X_2 = -1) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(X_1 = -1)\mathbb{P}(X_3 = 1)$$

$$\mathbb{P}(X_1 = 1, X_3 = -1) = \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = -1) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(X_1 = 1)\mathbb{P}(X_3 = -1)$$

$$\mathbb{P}(X_1 = -1, X_3 = -1) = \mathbb{P}(X_1 = -1, X_2 = 1) = \frac{1}{4} = \mathbb{P}(X_1 = -1)\mathbb{P}(X_3 = -1)$$

(Voir aussi la remarque sur les variables aléatoire de Bernoulli indépendantes qui s'adapte ici.)

Donc $X_1 \perp X_3$ et par symétrie, $X_2 \perp X_3$.

Pourtant, elles ne sont pas (mutuellement) indépendantes :

$$\mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 1) = \mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 1) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8}.$$

Propriété 26 : Somme de vaaid de Bernoulli

Si X_1, \dots, X_n vaaid de loi $\mathcal{B}(p)$, alors $X_1 + \dots + X_n \sim \mathcal{B}(n, p)$.

Démonstration

$$\mathbb{P}(X_1 + \dots + X_n = k) = \sum_{\substack{x_1, \dots, x_n \in \{0,1\} \\ x_1 + \dots + x_n = k}} \mathbb{P}(X_1 = x_1) \cdots \mathbb{P}(X_n = x_n) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}.$$

Remarque 23

Plus généralement, si les X_i indépendantes suivent $\mathcal{B}(n_i, p)$, alors $X_1 + \dots + X_n \sim \mathcal{B}(\sum n_i, p)$.

Propriété 27 : Fonction de variables aléatoires indépendante

Si X_1, \dots, X_n sont indépendantes, f_1, \dots, f_n définies sur $X_1(\Omega), \dots, X_n(\Omega)$, alors $f_1(X_1), \dots, f_n(X_n)$ sont indépendantes.

Démonstration

Similaire au cas de deux variables : $(f(X_i) \in B_i) = (X_i \in f^{-1}(B_i))$.

Propriété 28 : Lemme des coalitions

Soit $n, m \in \mathbb{N}$ tels que $0 < m < n$, X_1, \dots, X_n des variables aléatoires indépendantes, f définie sur $X_1(\Omega) \times \dots \times X_m(\Omega)$ et g définie sur $X_{m+1}(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega)$.

Alors $f(X_1, \dots, X_m)$ et $g(X_{m+1}, \dots, X_n)$ sont indépendantes.

Remarque 24

Cela se généralise à plus de deux fonctions.

Démonstration

Il suffit de remarquer que les variables aléatoires $Y = (X_1, \dots, X_m)$ et $Z = (X_{m+1}, \dots, X_n)$ sont indépendantes (ce qui ne pose pas vraiment de problème : il suffit de l'écrire) et d'appliquer la propriété précédente. ■