

# Probabilités sur un univers fini

## 1 EXPÉRIENCE ALÉATOIRE, UNIVERS, VARIABLES ALÉATOIRES

### 1 Expérience aléatoire

Une expérience est dite **aléatoire** lorsque l'on ne peut pas prédire de manière certaine son résultat. Autrement dit, il s'agit d'une expérience renouvelable et dont le résultat ne sera a priori pas toujours le même.

À chaque expérience aléatoire, on va associer un **résultat** (on dit aussi une **issue** ou une **réalisation**), dépendant de ce que l'on souhaite observer.

### 2 Univers et événements

#### Définition 1 : Univers

L'ensemble des résultats possibles d'une expérience aléatoire est appelé **univers** (ou univers des possibles), souvent noté  $\Omega$ .

#### Définition 2 : Événement

On appelle **événement aléatoire** tout ensemble de résultats d'une expérience aléatoire modélisée observable. C'est donc une partie de l'univers  $\Omega$  des possibles.

#### Définition 3 : Vocabulaires probabiliste et ensembliste

Terminologie probabiliste	Terminologie ensembliste
Résultat possible	$\omega \in \Omega$
Événement	$A \in \mathcal{P}(\Omega)$
$A$ est réalisé	$\omega \in A$
$A$ implique $B$	$A \subset B$
Événement élémentaire	Singleton $\{\omega\}$ où $\omega \in \Omega$
Événement « $A$ ou $B$ »	$A \cup B$
Événement « $A$ et $B$ »	$A \cap B$
Contraire de $A$	$\bar{A} = \Omega \setminus A$
( $A$ n'est pas réalisé)	
Événement impossible	$\emptyset$
Événement certain	$\Omega$
$A$ et $B$ sont incompatibles	$A$ et $B$ sont disjoints : $A \cap B = \emptyset$

#### Définition 4 : Système complet d'événements

On dit que  $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$  est un **système complet d'événements** (sce) lorsque les événements sont deux à deux incompatibles et que  $\bigsqcup_{1 \leq i \leq n} A_i$  est l'événement certain  $\Omega$ .

Autrement dit, lorsque  $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$  forme un recouvrement disjoint de  $\Omega$  :

$$\forall i \neq j, A_i \cap A_j = \emptyset \quad \text{et} \quad \bigcup_{1 \leq i \leq n} A_i = \Omega.$$

#### Propriété 1 : sce couple et élémentaire

Soit  $\Omega$  un univers fini.

- (i) Pour tout événement  $A$ , la famille  $(A, \bar{A})$  est un système complet d'événements de  $\Omega$ .
- (ii) La famille  $(\{\omega\})_{\omega \in \Omega}$  formée des événements élémentaires est un système complet d'événements de  $\Omega$ .

### 3 Variables aléatoires

#### Définition 5 : Variable aléatoire

Soit  $\Omega$  et  $E$  deux ensembles non vides. On appelle **variable aléatoire** sur  $\Omega$  à valeur dans  $E$  toute application

$$X : \Omega \longrightarrow E$$

Lorsque  $E \subset \mathbb{R}$ , on parle de **variable aléatoire réelle**.

Lorsque  $X(\Omega)$  est fini, on parle de **variable aléatoire finie**.

Si  $A \subset E$ , l'événement

$$X^{-1}(A) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in A\}$$

est noté  $\{X \in A\}$  ou  $(X \in A)$ .

En particulier, on note  $(X = x)$  l'événement

$$X^{-1}(\{x\}) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = x\}$$

et si  $X$  est une variable aléatoire réelle,  $(X \leq x)$  l'événement

$$X^{-1}([-\infty, x]) = \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \leq x\},$$

etc.

Comme pour toute fonction, on note  $\text{Im } X = X(\Omega) = \{X(\omega) ; \omega \in \Omega\}$ .



**Propriété 2 : sce associé à X**

Soit  $X$  variable aléatoire sur  $\Omega$  à valeurs dans  $E$ ,  $A \subset E$ .

$$(X \in A) = \bigsqcup_{x \in A} (X = x).$$

En particulier, avec  $A = X(\Omega)$ ,  $((X = x))_{x \in X(\Omega)}$  est un système complet d'événements appelé **système complet d'événements associé à X**.

(vii) Si  $A_1, \dots, A_n$  sont des parties de  $\Omega$  deux à deux disjointes (ie des événements deux à deux incompatibles),

$$\mathbb{P}(A_1 \sqcup \dots \sqcup A_n) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(A_k).$$

(viii)  $\mathbb{P}(A) = \sum_{\omega \in A} \mathbb{P}(\{\omega\})$ .

**Propriété 4 : Inégalité de Boole**

Si  $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{P}(\Omega)$ ,  $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^n A_i\right) \leq \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i)$ .

**Propriété 5 : Expression d'une probabilité à l'aide d'un sce**

Si  $(\Omega, \mathbb{P})$  est un espace probabilisé fini et  $A_1, \dots, A_n$  un système complet d'événements, alors pour tout événement  $B$ ,

$$\mathbb{P}(B) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(B \cap A_i).$$

**Corollaire 1 : Cas d'un couple sce**

Si  $(\Omega, \mathbb{P})$  est un espace probabilisé fini et  $A$  un événement, alors pour tout événement  $B$ ,

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \cap A) + \mathbb{P}(B \cap \bar{A})$$

**II ESPACES PROBABILISÉS FINIS**

**1 Probabilité**

**Définition 6 : Probabilité**

Soit  $\Omega$  un univers fini. On appelle **probabilité** sur  $\Omega$  toute application  $\mathbb{P}$  définie sur  $\mathcal{P}(\Omega)$  à valeurs réelles telle que

- Pour tout  $A \in \mathcal{P}(\Omega)$ ,  $\mathbb{P}(A) \geq 0$ .
- $\mathbb{P}(\Omega) = 1$ .
- $\mathbb{P}$  est **additive** : si  $A, B$  sont incompatibles,  $\mathbb{P}(A \sqcup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$ .

**Définition 7 : Espace probabilisé fini**

On appelle **espace probabilisé fini** tout couple  $(\Omega, \mathbb{P})$  où  $\Omega$  est fini et  $\mathbb{P}$  est une probabilité sur  $\Omega$ .

**Notation 1**

Si  $(\Omega, \mathbb{P})$  est un espace probabilisé fini,  $X$  une variable aléatoire sur  $\Omega$  à valeurs dans  $E$ ,  $A$  une partie de  $E$ ,  $x$  un élément de  $A$ .

On note  $\mathbb{P}(X \in A)$ ,  $\mathbb{P}(X = x)$  et  $\mathbb{P}(X \leq x)$  les probabilités des événements  $(X \in A)$ ,  $(X = x)$  et, si  $E \subset \mathbb{R}$ ,  $(X \leq x)$  respectivement.

**2 Propriétés**

**Propriété 3 : d'une probabilité**

Soit  $(\Omega, \mathbb{P})$  un espace probabilisé fini,  $A, B \in \mathcal{P}(\Omega)$  deux événements.

- (i)  $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$ .
- (ii)  $\mathbb{P}(\bar{A}) = 1 - \mathbb{P}(A)$ .
- (iii) **Croissance** : Si  $A \subset B$ ,  $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ .
- (iv)  $\mathbb{P}(A) \in [0, 1]$
- (v)  $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$ .  
Et donc si  $A \subset B$ ,  $\mathbb{P}(B \setminus A) = \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A)$ .
- (vi)  $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$ .

**3 Détermination par image des événements élémentaires**

**Définition 8 : Distribution de probabilités**

On appelle **distribution de probabilités** sur un ensemble  $E$  fini toute famille  $(p_x)_{x \in E} \in (\mathbb{R}^+)^E$  telle que  $\sum_{x \in E} p_x = 1$ .

**Propriété 6 : Caractérisation de la probabilité par une distribution de probabilité**

Si  $\Omega$  fini et si  $(p_\omega)_{\omega \in \Omega}$  est une distribution de probabilité sur  $\Omega$  (pour tout  $\omega \in \Omega$ ,  $p_\omega \geq 0$  tels que  $\sum_{\omega \in \Omega} p_\omega = 1$ ), alors il existe une unique probabilité  $\mathbb{P}$  sur  $\Omega$  telle que  $\forall \omega \in \Omega$ ,  $\mathbb{P}(\{\omega\}) = p_\omega$ .

## 4 Probabilité uniforme

### Définition 9 : Probabilité uniforme

Soit  $\Omega$  un ensemble fini. L'unique probabilité telle que tous les événements élémentaires soient équiprobables est appelée **probabilité uniforme**.

### Propriété 7 : Expression de la probabilité uniforme

Soit  $\Omega$  un ensemble fini muni de la probabilité uniforme  $\mathbb{P}$ . Alors

(i) Pour tout  $\omega \in \Omega$ ,  $p_\omega = \mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{|\Omega|}$ .

(ii) Pour tout événement  $A$ ,  $\mathbb{P}(A) = \frac{|A|}{|\Omega|}$ .

## 2 Formule des probabilités composées

### Théorème 1 : Formule des probabilités composées

Soit  $n \geq 2$ ,  $A_1, \dots, A_n$  des événements de l'espace probabilisé fini  $(\Omega, \mathbb{P})$  tels que  $\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_{n-1}) > 0$ .

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \dots \cap A_n) = \mathbb{P}(A_1) \times \mathbb{P}(A_2 | A_1) \times \mathbb{P}(A_3 | A_1 \cap A_2) \times \dots \times \mathbb{P}(A_n | A_1 \cap \dots \cap A_{n-1})$$

## 3 Formule des probabilités totales

### Théorème 2 : Formule des probabilités totales

Si  $(\Omega, \mathbb{P})$  est un espace probabilisé fini et  $A_1, \dots, A_n$  un système complet d'événements, alors pour tout événement  $B$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B) &= \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(B \cap A_i) = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(B | A_i) \mathbb{P}(A_i) \\ &= \sum_{i=1}^n \mathbb{P}(A_i) \mathbb{P}_{A_i}(B). \end{aligned}$$

avec la convention  $\mathbb{P}(B | A_i) \mathbb{P}(A_i) = 0$  lorsque  $\mathbb{P}(A_i) = 0$ .

### Corollaire 2 : Cas d'un couple sce

Si  $(\Omega, \mathbb{P})$  est un espace probabilisé fini et  $A$  un événement, alors pour tout événement  $B$ ,

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B | A) \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B | \bar{A}) \mathbb{P}(\bar{A})$$

## 4 Formule de Bayes

### Propriété 10 : Formule de probabilité des causes

Si  $A, B$  sont des événements de probabilité non nulle sur l'espace probabilisé  $(\Omega, \mathbb{P})$ , alors

$$\mathbb{P}(A | B) = \frac{\mathbb{P}(B | A) \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B)}$$

$$\mathbb{P}(A | B) = \frac{\mathbb{P}(B | A) \mathbb{P}(A)}{\mathbb{P}(B | A) \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B | \bar{A}) \mathbb{P}(\bar{A})}$$

# III PROBABILITÉS CONDITIONNELLES

## 1 Définition

### Définition 10 : Probabilité conditionnelle

Si  $A$  et  $B$  sont des événements de l'espace probabilisé fini  $(\Omega, \mathbb{P})$  et si  $\mathbb{P}(B) > 0$ , on appelle **probabilité de  $A$  sachant  $B$**  le réel

$$\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A | B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}.$$

### Propriété 8

Soit  $(\Omega, \mathbb{P})$  un espace probabilisé fini,  $B$  un événement tel que  $\mathbb{P}(B) > 0$ . Alors l'application

$$\mathbb{P}_B : \begin{cases} \mathcal{P}(\Omega) & \longrightarrow [0, 1] \\ A & \longrightarrow \mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A | B) \end{cases}$$

est une probabilité sur  $\Omega$ .

### Propriété 9

Soit  $(\Omega, \mathbb{P})$  un espace probabilisé fini,  $A, B$  deux événements.

- Si  $\mathbb{P}(B) > 0$ ,  $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A | B) \times \mathbb{P}(B)$
- Si  $\mathbb{P}(A) > 0$ ,  $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(B | A) \times \mathbb{P}(A)$



**Théorème 3 : Formule de Bayes**

Soit  $(A_1, \dots, A_n)$  un système complet d'événements de probabilités non nulles sur l'espace probabilisé  $(\Omega, \mathbb{P})$ ,  $B$  un événement de probabilité non nulle et  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Alors

$$\mathbb{P}(A_j | B) = \frac{\mathbb{P}(B | A_j) \mathbb{P}(A_j)}{\sum_{i=1}^n \mathbb{P}(B | A_i) \mathbb{P}(A_i)}$$

**IV LOI D'UNE VARIABLE ALÉATOIRE**

**1 Généralités**

**Définition 11 : Loi d'une variable aléatoire**

Soit  $X$  variable aléatoire sur l'espace probabilisé  $(\Omega, \mathbb{P})$ . On appelle **loi de  $X$**  l'application

$$\mathbb{P}_X : \begin{cases} \mathcal{P}(X(\Omega)) & \longrightarrow [0, 1] \\ A & \longrightarrow \mathbb{P}(X \in A) \end{cases}$$

**Propriété 11 : La loi d'une VA est une probabilité**

La loi  $\mathbb{P}_X$  de la variable aléatoire  $X$  est une probabilité sur  $X(\Omega)$ .

Ainsi,  $(X(\Omega), \mathbb{P}_X)$  est un espace probabilisé.

**Propriété 12 : Événements élémentaires**

Si  $X$  variable aléatoire sur  $\Omega$ , la loi de  $X$  est entièrement déterminée par la donnée des  $\mathbb{P}_X(\{x\}) = \mathbb{P}(X = x)$  pour  $x \in X(\Omega)$  : ils forment une distribution de probabilités.

Plus précisément, on a pour tout  $A \subset X(\Omega)$ ,

$$\mathbb{P}_X(A) = \sum_{x \in A} \mathbb{P}(X = x).$$

**2 Quelques lois usuelles**

$X$  désigne une variable aléatoire sur un espace probabilisé fini  $(\Omega, \mathbb{P})$ .

**a Loi uniforme**

**Définition 12 : Loi uniforme**

On dit que  $X$  suit une **loi uniforme** lorsque pour tout  $x \in X(\Omega)$ ,

$$\mathbb{P}_X(\{x\}) = \mathbb{P}(X = x) = \frac{1}{n}$$

où  $n = |X(\Omega)|$ , c'est-à-dire que pour tout  $A \subset X(\Omega)$ ,

$$\mathbb{P}_X(A) = \frac{|A|}{n}.$$

On note alors  $X \sim \mathcal{U}(n)$ .

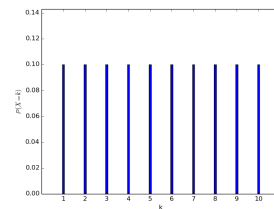


FIGURE 1 – Loi  $\mathcal{U}(10)$

**b Loi de Bernoulli**

**Définition 13 : Loi de Bernoulli**

On dit que  $X$  suit une **loi de Bernoulli de paramètre  $p \in [0, 1]$**  lorsque  $X(\Omega) \subset \{0, 1\}$ ,  $\mathbb{P}(X = 1) = p$  et  $\mathbb{P}(X = 0) = q = 1 - p$ .

On note alors  $X \sim \mathcal{B}(p)$ .

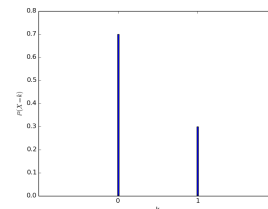


FIGURE 2 – Loi  $\mathcal{B}(0.3)$

**Propriété 13**

Les variables aléatoires qui suivent une loi de Bernoulli de paramètre  $p$  sont exactement les fonctions indicatrices des parties  $F$  de  $\Omega$  telles que  $\mathbb{P}(F) = p$ .

**C** Loi binomiale

**Définition 14 : Loi binomiale**

On dit que  $X$  suit une **loi binomiale de paramètre**  $(n, p)$  où  $p \in [0, 1]$  lorsque  $X(\Omega) \subset \llbracket 0, n \rrbracket$  et pour tout  $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ ,

$$\mathbb{P}(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k} = \binom{n}{k} p^k q^{n-k}$$

avec  $q = 1 - p$ . On note alors  $X \sim \mathcal{B}(n, p)$ .

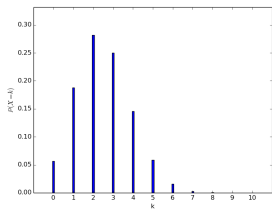


FIGURE 3 – Loi  $\mathcal{B}(10, 1/4)$

**Propriété 15**

Si  $X$  et  $Y$  sont des variables aléatoires,

$$\mathbb{P}(X + Y = z) = \sum_{x,y \mid x+y=z} \mathbb{P}(X = x, Y = y)$$

$$\mathbb{P}(XY = z) = \sum_{x,y \mid xy=z} \mathbb{P}(X = x, Y = y)$$

**2** Couples de variables aléatoires

**a** Définitions

**Définition 16 : Couple de variables aléatoires**

Soit  $\Omega$  fini,  $X, Y$  variables aléatoires sur  $\Omega$  à valeurs dans  $E, E'$ . L'application

$$(X, Y) : \begin{cases} \Omega & \rightarrow E \times E' \\ \omega & \mapsto (X(\omega), Y(\omega)) \end{cases}$$

est une variable aléatoire appelé **couple**  $(X, Y)$ .

**Propriété 16 : sce associé à un couple de va**

Soit  $(X, Y)$  un couple de variables aléatoires sur un univers fini  $\Omega$ . Alors la famille d'événements  $\left( (X, Y) = (x, y) \right)_{(x,y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)}$  est un système complet d'événements appelé **système complet d'événements associé au couple**  $(X, Y)$ .

**b** Lois conjointe et marginales

**Définition 17 : Loi conjointe**

Soit  $(X, Y)$  un couple de variable aléatoires. On appelle **loi conjointe** de  $(X, Y)$  la loi  $\mathbb{P}_{(X,Y)}$  de la variable aléatoire  $(X, Y)$ .

**Définition 18 : Lois marginales**

Si  $(X, Y)$  est un couple de variables aléatoires, les lois de  $X$  et de  $Y$  sont appelées **première et seconde lois marginales du couple**.

**V** OPÉRATIONS SUR LES VARIABLES ALÉATOIRES

**1** Fonction d'une variable aléatoire

**Définition 15 : Fonction d'une variable aléatoire**

Soit  $X$  une variable aléatoire sur  $\Omega$  et  $f$  un application définie sur  $X(\Omega)$ . Alors  $f \circ X$  est une variable aléatoire notée  $f(X)$ .

**Propriété 14 : Détermination de la loi de  $f(X)$**

La loi de  $Y = f(X)$  est donnée par

$$\begin{aligned} \forall y \in f(X(\Omega)), \quad \mathbb{P}(Y = y) &= \mathbb{P}(f(X) = y) = \mathbb{P}(X \in f^{-1}(\{y\})) \\ &= \sum_{x \mid f(x)=y} \mathbb{P}(X = x). \end{aligned}$$



**Propriété 17**

La loi conjointe de  $(X, Y)$  détermine les lois marginales de  $(X, Y)$  mais la réciproque est fautive.

**C**

**Loi conditionnelle**

**Définition 19 : Loi conditionnelle**

Soit  $(X, Y)$  un couple de variables aléatoires. Pour tout  $x \in X(\Omega)$  tel que  $\mathbb{P}(X = x) \neq 0$ , la **loi conditionnelle de  $Y$  sachant  $(X = x)$**  est la loi de  $Y$  pour la probabilité conditionnelle  $\mathbb{P}_{(X=x)}$ . Elle est donc déterminée par, pour tout  $y \in Y(\Omega)$ ,

$$\mathbb{P}(Y = y \mid X = x) = \frac{\mathbb{P}(X = x, Y = y)}{\mathbb{P}(X = x)}.$$

**3**

**Extension aux  $n$ -uplets**

**Définition 20 :  $n$ -uplets de variables aléatoires**

Soit  $(X_1, \dots, X_n)$  un  $n$ -uplet de variables aléatoires.

La **loi conjointe** de  $(X_1, \dots, X_n)$  est déterminée par les  $\mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)$  où pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $x_i \in X_i(\Omega)$ .

Les lois de  $X_1, \dots, X_n$  sont les **lois marginales** de  $(X_1, \dots, X_n)$ .

**Définition 21 : Loi conditionnelle pour  $n$  variables**

Si  $x_1, \dots, x_{n-1}$  sont fixés, tel que  $\mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}) > 0$ , la **loi conditionnelle** de  $X_n$  sachant  $(X_1 = x_1, \dots, X_{n-1} = x_{n-1})$  est déterminée par

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_n = x_n \mid X_1 = x_1, \dots, X_{n-1} = x_{n-1}) \\ = \frac{\mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n)}{\mathbb{P}(X_1 = x_1, \dots, X_{n-1} = x_{n-1})} \end{aligned}$$

pour tout  $x_n$ .

**VI INDÉPENDANCE**

**1 Couple d'événements indépendants**

**Définition 22 : Indépendance de deux événements**

Deux événements  $A$  et  $B$  d'un espace probabilisé fini  $(\Omega, \mathbb{P})$  sont dits **indépendants** lorsque

$$\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B).$$

On note  $A \perp B$  lorsque  $A$  et  $B$  sont indépendants.

**Propriété 18 : Indépendance et probabilités conditionnelles**

Deux événements  $A$  et  $B$  d'un espace probabilisé fini  $(\Omega, \mathbb{P})$  tels que  $\mathbb{P}(B) > 0$  sont **indépendants** si et seulement si  $\mathbb{P}(A \mid B) = \mathbb{P}(A)$ .

**Propriété 19 : Indépendance et événement contraire**

Si deux événements  $A$  et  $B$  d'un espace probabilisé fini  $(\Omega, \mathbb{P})$  sont indépendants, alors

- $A$  et  $\bar{B}$  sont indépendants,
- $\bar{A}$  et  $B$  sont indépendants,
- $\bar{A}$  et  $\bar{B}$  sont indépendants.

**2 Famille d'événements indépendants**

**Définition 23 : Famille d'événements indépendants**

Soit  $(A_1, A_2, \dots, A_n)$  une famille d'événements de l'espace probabilisé fini  $(\Omega, \mathbb{P})$ .

- $A_1, A_2, \dots, A_n$  sont dit **deux à deux indépendants** lorsque pour tout  $i \neq j$ ,  $A_i$  et  $A_j$  sont indépendants, c'est-à-dire que  $\mathbb{P}(A_i \cap A_j) = \mathbb{P}(A_i)\mathbb{P}(A_j)$ .
- $A_1, A_2, \dots, A_n$  sont dit **indépendants**, ou **mutuellement indépendants**, lorsque pour toute partie non vide  $I$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ ,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i).$$

**Propriété 20**

Si  $A_1, A_2, \dots, A_n$  sont indépendants, alors ils sont deux à deux indépendants. La réciproque est fautive si  $n \geq 3$ .

**4 Variables aléatoires indépendantes**

**a Cas d'un couple de variable**

**Définition 24 : Indépendance**

Soient  $X, Y$  deux variables aléatoires sur l'espace probabilisé fini  $(\Omega, \mathbb{P})$ .

$X$  et  $Y$  sont dites **indépendantes** si pour tout  $(A, B) \in \mathcal{P}(X(\Omega)) \times \mathcal{P}(Y(\Omega))$ , les événements  $(X \in A)$  et  $(Y \in B)$  sont indépendants, c'est-à-dire

$$\mathbb{P}(X \in A, Y \in B) = \mathbb{P}(X \in A) \mathbb{P}(Y \in B).$$

On note  $X \perp Y$ .

**Propriété 21 : Caractérisation par les événements élémentaires**

$X$  et  $Y$  sont indépendantes si et seulement si pour tout  $(x, y) \in X(\Omega) \times Y(\Omega)$ ,  $(X = x)$  et  $(Y = y)$  sont indépendants, c'est-à-dire

$$\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x) \mathbb{P}(Y = y).$$

**Propriété 22 : Indépendance et lois conditionnelles**

Soit  $(X, Y)$  couple de variables aléatoires. Il y a équivalence entre

- (i) Les variables aléatoires  $X$  et  $Y$  sont indépendantes.
- (ii) Pour tout  $y \in Y(\Omega)$  tel que  $\mathbb{P}(Y = y) > 0$ , la loi de  $X$  sachant  $(Y = y)$  est la même que la loi de  $X$ .
- (iii) Pour tout  $x \in X(\Omega)$  tel que  $\mathbb{P}(X = x) > 0$ , la loi de  $Y$  sachant  $(X = x)$  est la même que la loi de  $Y$ .

**Propriété 23 : Indépendance et fonctions**

Si  $X, Y$  sont des variables aléatoires indépendantes,  $f, g$  définies sur  $X(\Omega)$  et  $Y(\Omega)$  respectivement, alors  $f(X)$  et  $g(Y)$  sont indépendantes.

**b Variables aléatoires mutuellement indépendantes**

**Définition 25 : Indépendance de plus de deux variables aléatoires**

Des variables aléatoires  $X_1, \dots, X_n$  sont dites **(mutuellement) indépendantes** lorsque pour toutes parties  $A_1$  de  $X_1(\Omega)$ , ...,  $A_n$  de  $X_n(\Omega)$ , les événements  $(X_1 \in A_1), \dots, (X_n \in A_n)$  le sont.

Si, de plus, elles ont même loi, on dit que ce sont des **variables aléatoires indépendantes identiquement distribuées** (vaid).

**Propriété 24 : Caractérisation par les événements élémentaires**

$X_1, \dots, X_n$  sont indépendantes si et seulement si pour tout  $(x_1, \dots, x_n) \in X_1(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega)$ , les événements  $(X_1 = x_1), \dots, (X_n = x_n)$  le sont.

**Propriété 25 : Somme de vaid de Bernoulli**

Si  $X_1, \dots, X_n$  vaid de loi  $\mathcal{B}(p)$ , alors  $X_1 + \dots + X_n \sim \mathcal{B}(n, p)$ .

**Propriété 26 : Fonction de variables aléatoires indépendante**

Si  $X_1, \dots, X_n$  sont indépendantes,  $f_1, \dots, f_n$  définies sur  $X_1(\Omega), \dots, X_n(\Omega)$ , alors  $f_1(X_1), \dots, f_n(X_n)$  sont indépendantes.

**Propriété 27 : Lemme des coalitions**

Soit  $n, m \in \mathbb{N}$  tels que  $0 < m < n$ ,  $X_1, \dots, X_n$  des variables aléatoires indépendantes,  $f$  définie sur  $X_1(\Omega) \times \dots \times X_m(\Omega)$  et  $g$  définie sur  $X_{m+1}(\Omega) \times \dots \times X_n(\Omega)$ .

Alors  $f(X_1, \dots, X_m)$  et  $g(X_{m+1}, \dots, X_n)$  sont indépendantes.