24 Applications linéaires

Extrait du programme officiel :

Contenus	Capacités & commentaires
a) Généralités	
Application linéaire.	
Opérations sur les applications linéaires : combinaison linéaire, composition. Isomorphisme, réciproque.	Espace vectoriel $\mathscr{L}(E,F)$ des applications linéaires de E dans F. Bilinéarité de la composition.
Image directe et image réciproque d'un sous-espace par une application linéaire.	
Image d'une application linéaire.	
Noyau d'une application linéaire.	Caractérisation de l'injectivité.
Si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice de E et si $u \in \mathscr{L}(E,F)$, alors $\mathfrak{Im}\, u = \mathrm{Vect}\big(u(x_i)\big)_{i\in I}$.	
Application linéaire de rang fini.	Notation $\mathrm{rg}(u)$.
Le rang de $v\circ u$ est majoré par $\min(\mathrm{rg}(u),\mathrm{rg}(v))$. Invariance du rang par composition par un isomorphisme.	
b) Endomorphismes	
Identité, homothéties.	Notations id_E, id.
Anneau $(\mathscr{L}(E),+,\circ)$.	Non commutativité si $\dim E \geqslant 2$. Notation vu pour la composée $v\circ u$. Notation u^k pour $u\in\mathscr{L}(E)$ et $k\in\mathbb{N}$.
Projection ou projecteur, symétrie : définition géométrique, caractérisation par $p^2=p$, par $s^2=\mathrm{id}$.	On incite les étudiants à se représenter géométriquement ces notions par des figures en dimension 2 et 3.
Automorphismes. Groupe linéaire.	Notation $\mathrm{GL}(E)$. Notation u^k pour $u\in\mathrm{GL}(E)$ et $k\in\mathbb{Z}$.
c) Détermination d'une application linéaire	
Si $(e_i)_{i\in I}$ est une base de E et $(f_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de F, alors il existe une unique application $u\in\mathscr{L}(E,F)$ telle que, pour tout $i\in I$, $u(e_i)=f_i$.	Caractérisation de l'injectivité, de la surjectivité, de la bijectivité de u.
Espaces vectoriels isomorphes, caractérisation par la dimension.	
Pour une application linéaire entre deux espaces de même dimension finie, équivalence entre injectivité, surjectivité et bijectivité.	
Un endomorphisme d'un espace de dimension finie inversible à gauche ou à droite est inversible.	
Dimension de $\mathscr{L}(E,F)$ si E et F sont de dimension finie.	
Si E_1 et E_2 sont des sous-espaces de E tels que $E=E_1\oplus E_2$, si $u_1\in\mathscr{L}(E_1,F)$, $u_2\in\mathscr{L}(E_2,F)$, il existe une unique application $u\in\mathscr{L}(E,F)$ coïncidant avec u_1 sur E_1 et avec u_2 sur E_2.	
d) Théorème du rang	
Forme géométrique du théorème du rang : si $u\in\mathscr{L}(E,F)$ et si S est un supplémentaire de $\mathrm{Ker}\, u$ dans E, alors u induit un isomorphisme de S sur $\mathfrak{Im}\, u$.	
Théorème du rang : si E est de dimension finie n et $u\in\mathscr{L}(E,F)$, alors $n=\dim\mathrm{Ker}\, u+\mathrm{rg}(u)$.	
e) Formes linéaires et hyperplans	
Forme linéaire.	Formes coordonnées relativement à une base.

Contenus	Capacités & Commentaires
Hyperplan, défini comme noyau d'une forme linéaire non nulle.	Équations d'un hyperplan dans une base en dimension finie.
Si H est un hyperplan de E et D une droite non contenue dans H, alors $E = H \oplus D$.	
Réciproquement, tout supplémentaire d'une droite est un hyperplan.	En dimension n, les hyperplans sont exactement les sous-espaces de dimension $n-1$.
Comparaison de deux équations d'un même hyperplan.	
Si E est un espace de dimension finie n, l'intersection de m hyperplans est de dimension au moins $n-m$. Réciproquement, tout sous-espace de E de dimension $n-m$ est l'intersection de m hyperplans.	Système d'équations d'un sous-espace vectoriel ; cas des droites vectorielles de $\mathbb{R}^2$, des droites et plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$. L'étude de la dualité est hors programme.

Table des matières

24 Applications linéaires 1

I Généralités 3
1 Définition . . . 3
2 Propriétés . . . 5
3 Noyau et image . . . 6
4 Image d'une famille de vecteurs, rang . . . 7
5 Théorème du rang . . . 8

II Endomorphismes 9
1 Structure d'algèbre . . . 9
2 Groupe linéaire . . . 10
3 Projecteurs . . . 10
4 Symétries . . . 11
5 Affinités . . . 12

III Détermination d'une application linéaire 12
1 Image d'une base . . . 12
2 Applications linéaires et dimensions . . . 13
3 Dimension de $\mathscr{L}(E,F)$ . . . 14
4 Décomposition d'applications linéaires . . . 14

IV Formes linéaires et hyperplans 15
1 Cas général . . . 15
2 Cas de la dimension finie . . . 15

Dans tout le chapitre, $\mathbb{K}$ désigne un corps commutatif de caractéristique nulle ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ au programme).

I Généralités

1 Définition

Définition 1 : Application linéaire

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u : E \to F$.
On dit que u est une **application linéaire** lorsque

$$\begin{cases} \forall \vec{x}, \vec{y} \in E, \quad u(\vec{x}+\vec{y}) = u(\vec{x}) + u(\vec{v}) \\ \forall \vec{x} \in E, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad u(\lambda \vec{x}) = \lambda u(\vec{x}) \end{cases}$$

ce qui s'écrit aussi

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in E, \quad \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad u(\vec{x}+\lambda\vec{y}) = u(\vec{x}) + \lambda u(\vec{v}).$$

On note $\mathscr{L}(E,F)$ l'ensemble des applications linéaires de E vers F.

- Si u est bijective, on parle d'**isomorphisme** (d'espaces vectoriels).
- Si $E = F$, on parle d'**endomorphisme** et on note $\mathscr{L}(E) = \mathscr{L}(E,F)$.
- Si $E = F$ et u est bijective, on parle d'**automorphisme**.
- Si $\varphi \in \mathscr{L}(E,\mathbb{K})$, on dit que φ est une **forme linéaire**.
- On note $\mathscr{L}(E,\mathbb{K}) = E^*$ appelé **dual** de E l'ensemble des formes linéaires sur E.

Remarques 1

R 1 – Ne pas confondre E^* et $E \setminus \{0_E\}$.

R 2 – Une application linéaire est en particulier un morphisme de groupe de $(E,+)$ sur $(F,+)$.

Exemples 1

E 1 – $u : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y-z, x+z) \end{array} \right.$

Notation matricielle (bases canoniques) : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y-z \\ x+z \end{pmatrix}$.

E 2 – Si E est l'espace des fonctions dérivables sur $I \subset \mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}$, $u : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{K}^I \\ f & \longmapsto & f' \end{array} \right.$ est linéaire.

Plus généralement, si E est l'espace des fonctions n fois dérivables sur $I \subset \mathbb{R}$, $u : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{K}^I \\ f & \longmapsto & f^{(n)} \end{array} \right.$ est linéaire.

$u : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{C}([a,b]) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \end{array} \right.$ est une forme linéaire.

E 3 – **Homothéties vectorielles** : pour tout $\alpha \in \mathbb{K}$, $h_\alpha = \alpha\,\mathrm{id}_E \in \mathscr{L}(E)$.

E 4 – Les applications linéaires de $\mathscr{L}(\mathbb{K})$ sont les $\left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & ax \end{array} \right.$ pour $a \in \mathbb{K}$.

E 5 – Si $X \neq \varnothing$, F $\mathbb{K}$-espace vectoriel, $a \in X$, alors $u_a : \left| \begin{array}{ccc} F^X & \longrightarrow & F \\ f & \longmapsto & f(a) \end{array} \right.$ est linéaire (morphisme d'évaluation).

E 6 – $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[x] \\ P & \longmapsto & \tilde{P} \end{array} \right.$ où $\mathbb{K}[x]$ est l'ensemble des fonctions polynomiales est linéaire. Si $\mathbb{K}$ est infini, c'est un isomorphisme.

E 7 – La trace est une forme linéaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

E 8 – La transposition est linéaire sur $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ vers $\mathscr{M}_{p,n}(\mathbb{K})$.

E 9 – Il y a un isomorphisme canonique entre $\mathbb{K}^n$ et $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$: $(x_1,\dots,x_n) \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \\ x_n \end{pmatrix}$ et en particulier entre $\mathbb{K}$ et $\mathscr{M}_1(\mathbb{K})$: cela légitime les abus de notations que l'on rencontre parfois.

Définition 2 : Morphisme d'algèbre

Soit $(\mathscr{A}, +_{\mathscr{A}}, \times_{\mathscr{A}}, \cdot_{\mathscr{A}})$, $(\mathscr{B}, +_{\mathscr{B}}, \times_{\mathscr{B}}, \cdot_{\mathscr{B}})$ et $f : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$.
On dit que f est un **morphisme d'algèbres** lorsque

- f est linéaire,

- $\forall x, y \in \mathscr{A}, \quad f(x \times_{\mathscr{A}} y) = f(x) \times_{\mathscr{B}} f(y)$
- $f(1_{\mathscr{A}}) = 1_{\mathscr{B}}$.

Exemples 2

E 1 – Si $X \neq \varnothing$, $\mathscr{A}$ une $\mathbb{K}$-algèbre, $a \in X$, alors $u_a : \left| \begin{array}{ccc} \mathscr{A}^X & \longrightarrow & \mathscr{A} \\ f & \longmapsto & f(a) \end{array} \right.$ est un morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres. (morphisme d'évaluation).

E 2 – $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[x] \\ P & \longmapsto & \tilde{P} \end{array} \right.$ est un isomorphisme d'algèbre si $\mathbb{K}$ est infini, et $g : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}(X) \\ P & \longmapsto & \frac{P}{1} \end{array} \right.$ est un morphisme d'algèbres injectif.

E 3 – Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathscr{M}_n(K) \\ P & \longmapsto & P(A) \end{array} \right.$ est un morphisme d'algèbres.

E 4 – $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K} & \longrightarrow & \mathscr{M}_1(\mathbb{K}) \\ x & \longmapsto & (x) \end{array} \right.$ est un isomorphisme de $\mathbb{K}$-algèbres.

2 Propriétés

Propriété 1

Soient E, F, G trois $\mathbb{K}$-espaces vectoriels et $u \in \mathscr{L}(E, F)$.

(i) $u(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$

(ii) $\forall \vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n \in E, \quad \forall \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$,

$$u\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{x}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u(\vec{x}_i)$$

(iii) *Si A est une partie de E, $u(\operatorname{Vect} A) = \operatorname{Vect}(u(A))$.*

(iv) *Si E' est un sous-espace vectoriel de E, $u_{|E'} \in \mathscr{L}(E', F)$ (u induit une application linéaire sur E').*

(v) *Si u est bijective (isomorphisme) alors $u^{-1} \in \mathscr{L}(F, E)$.*

(vi) *$(\mathscr{L}(E, F), +, \cdot)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.*

(vii) *Si $u \in \mathscr{L}(E, F)$ et $v \in \mathscr{L}(F, G)$, $v \circ u \in \mathscr{L}(E, G)$.*

(viii) *Si $u, u_1, u_2 \in \mathscr{L}(E, F)$, $v, v_1, v_2 \in \mathscr{L}(F, G)$, et $\lambda \in \mathbb{K}$*

$$\begin{cases} v \circ (u_1 + \lambda u_2) = v \circ u_1 + \lambda v \circ u_2 \\ (v_1 + \lambda v_2) \circ u = v_1 \circ u + \lambda v_2 \circ u \end{cases}$$

(ix) *Si E' est un sous-espace vectoriel de E et F' est un sous-espace vectoriel de F, $u(E')$ est un sous-espace vectoriel de F et $u^{-1}(F')$ est un sous-espace vectoriel de E.*

Démonstration

(i) $2u(\vec{0}_E) = u(\vec{0}_E + \vec{0}_E) = u(\vec{0}_E)$. (Propriété de morphisme de groupes)

(ii) Récurrence.

(iii) Si $\vec{x} \in \operatorname{Vect} A$, on a $n \in \mathbb{N}$, $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n \in A$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $\vec{x} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{x}_i$ et donc $u(\vec{x}) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u(\vec{x}_i) \in \operatorname{Vect}(u(A))$.

Si $\vec{y} \in \operatorname{Vect}(u(A))$, on a $n \in \mathbb{N}$, $\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n \in A$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $\vec{y} = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i u(\vec{x}_i)$ et donc $\vec{y} = u\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{x}_i\right) \in u(\operatorname{Vect} A)$.

(iv) Immédiat.

(v) Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$ bijective, $\vec{y}_1, \vec{y}_2 \in F$ et $\lambda \in \mathbb{K}$.
On a $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in E$ tels que $\vec{y}_1 = u(\vec{x}_1)$ et $\vec{y}_2 = u(\vec{x}_2)$.
Alors $u^{-1}(\vec{y}_1 + \lambda \vec{y}_2) = u^{-1}(u(\vec{x}_1) + \lambda u(\vec{x}_2)) = u^{-1} \circ u(\vec{x}_1 + \lambda \vec{x}_2) = \vec{x}_1 + \lambda \vec{x}_2 = u^{-1}(\vec{y}_1) + \lambda u^{-1}(\vec{y}_2)$ en utilisant la linéarité de u.

(vi) Sous-espace vectoriel de F^E sans difficulté.

(vii) Si $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in E$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, $v \circ u(\vec{x}_1 + \lambda \vec{x}_2) = v(u(\vec{x}_1) + \lambda u(\vec{x}_2)) = v \circ u(\vec{x}_1) + \lambda v \circ u(\vec{x}_2)$ par linéarité de u puis de v.

(viii) $(v_1 + \lambda v_2) \circ u = v_1 \circ u + \lambda v_2 \circ u$ est toujours vrai, $v \circ (u_1 + \lambda u_2) = v \circ u_1 + \lambda v \circ u_2$ provient de la linéarité de v.

(ix)
- $u(E') \subset F$, $u(E') \neq \varnothing$ car $\vec{0}_F = u(\underbrace{\vec{0}_E}_{\in E'}) \in u(E')$ et si $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in E'$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors
$$u(\vec{x}_1) + \lambda u(\vec{x}_2) = u(\underbrace{\vec{x}_1 + \lambda \vec{x}_2}_{\in E'}) \in u(E').$$
- $u^{-1}(F') \subset E$, $u^{-1}(F') \neq \varnothing$ car $u(\vec{0}_E) = \vec{0}_F \in F'$ donc $0_E \in u^{-1}(F')$, et si $\vec{x}_1, \vec{x}_2 \in u^{-1}(F')$ et $\lambda \in \mathbb{K}$, alors $u(\vec{x}_1 + \lambda \vec{x}_2) = \underbrace{u(\vec{x}_1)}_{\in F'} + \lambda \underbrace{u(\vec{x}_2)}_{\in F'} \in F'$ donc $\vec{x}_1 + \lambda \vec{x}_2 \in u^{-1}(F')$. ■

Remarque 1

(viii) nous dit que $\left| \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(E,F) & \longrightarrow & \mathscr{L}(E,G) \\ u & \longmapsto & v \circ u \end{array} \right.$ et $\left| \begin{array}{ccc} \mathscr{L}(F,G) & \longrightarrow & \mathscr{L}(E,G) \\ u & \longmapsto & v \circ u \end{array} \right.$ sont linéaires.

3 Noyau et image

Définition 3 : Noyau et image

Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$.
- Le **noyau** de u est
$$\operatorname{Ker} u = u^{-1}(\{\vec{0}_F\}) = \{\vec{x} \in E \mid u(\vec{x}) = \vec{0}_F\} \in \mathscr{P}(E).$$
- L'**image** de u est
$$\operatorname{Im} u = u(E) = \{u(\vec{x}) \ ; \ \vec{x} \in E\} \in \mathscr{P}(F).$$

Remarque 2

L'image de u est en fait l'image de u vu comme simple fonction et le noyau de u est le noyau de u vu comme un morphisme de groupes additifs.

Exemple 1

Soit $u : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y-z, x+z) \end{array} \right.$

Alors $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Vect}(-1,2,1)$ et $\operatorname{Im} u = \mathbb{R}^2$.

Propriété 2

Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$.

(i) $\operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Ker} u$ sont des sous-espaces vectoriels de F et E respectivement.

(ii) u est injective si et seulement si $\operatorname{Ker} u = \{\vec{0}_E\}$.

(iii) u est surjective si et seulement si $\operatorname{Im} u = F$.

(iv) Si E' est un sous-espace vectoriel de E, alors $\operatorname{Ker} u_{|E'} = E' \cap \operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u_{|E'} = u(E')$.

Démonstration

(i) Image directe et réciproque des sous-groupes E et $\{\vec{0}_F\}$.

(ii) Déjà vu pour les morphismes de groupes : on a toujours $\vec{0}_E \in \operatorname{Ker} u$ et

- si u est injective,
$$\vec{x} \in \operatorname{Ker} u \Rightarrow u(\vec{x}) = \vec{0}_F = u(\vec{0}_E) \Rightarrow \vec{x} = \vec{0}_E.$$
- si $\operatorname{Ker} u = \{0_E\}$ alors
$$u(\vec{x}) = u(\vec{x}') \Rightarrow u(x - x') = \vec{0}_F \Rightarrow x - x' \in \operatorname{Ker} u \Rightarrow x = x'$$
par linéarité de u, donc u est injective.

(iii) Toujours vrai : u est surjective si et seulement si $\forall\, \vec{y} \in F,\ \exists\, \vec{x} \in E,\ u(\vec{x}) = \vec{y}$ si et seulement si $\forall\, \vec{y} \in F,\ \vec{y} \in u(E)$ si et seulement si $F \subset u(E)$; et $u(E) \subset F$ est toujours vrai.

(iv) $\vec{x} \in \operatorname{Ker} u_{|E'} \Longleftrightarrow \vec{x} \in E'$ et $u(\vec{x}) = \vec{0}_F$ et $\vec{y} \in \operatorname{Im} u_{|E'} \Longleftrightarrow \exists\, \vec{x} \in E',\ u(\vec{x}) = \vec{y} \Longleftrightarrow \vec{y} \in u(E')$. ■

Exercice 1

Si $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $v \in \mathscr{L}(F,G)$, condition nécessaire et suffisante pour que $v \circ u = 0_{\mathscr{L}(E,G)}$? ($\operatorname{Im} u \subset \operatorname{Ker} v$).

4 Image d'une famille de vecteurs, rang

Propriété 3

Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $\mathscr{F} = (\vec{e}_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E. On note $u(\mathscr{F}) = \big(u(\vec{e}_i)\big)_{i \in I}$.

(i) Si $\mathscr{F}$ est liée, $u(\mathscr{F})$ l'est aussi.

(ii) Si $\mathscr{F}$ engendre E, $u(\mathscr{F})$ engendre $\operatorname{Im} u$ (⚠ et non F si u n'est pas surjective !)

*(iii) Si $\mathscr{F}$ est libre et u **est injective**, $u(\mathscr{F})$ est libre.*

(iv) Si u est un isomorphisme et $\mathscr{B}$ est une base de E, alors $u(\mathscr{B})$ est une base de F.
En particulier, si E est de dimension finie, alors F l'est et $\dim E = \dim F$.

Remarque 3

L'image d'une base [de l'espace de départ] par un isomorphisme est une base [de l'espace d'arrivée].

Démonstration

(i) Si $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{e}_i = \vec{0}_E$, alors $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u(\vec{e}_i) = u\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{e}_i\right) = u(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$.

(ii) $\operatorname{Im} u = u(E) = u(\operatorname{Vect} \mathscr{F}) = \operatorname{Vect}(u(\mathscr{F}))$.

(iii) Si $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i u(\vec{e}_i) = \vec{0}_F$, alors $u\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{e}_i\right) = u(\vec{0}_E)$, donc par injectivité, $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \vec{e}_i = \vec{0}_E$ donc les λ_i sont nuls car $\mathscr{F}$ est libre.

(iv) par (i) et (ii). ■

Propriété 4

Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$ avec E ou F de dimension finie.
Alors $\operatorname{Im} u$ est de dimension finie au plus $\min(\dim E, \dim F)$.

Démonstration

Si $E = \operatorname{Vect}(\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_p)$, alors $\operatorname{Im} u = u(E) = \operatorname{Vect}(u(\vec{e}_1), \ldots, u(\vec{e}_p)$ de dimension finie $\leqslant p$ et $\operatorname{Im} u$ sous-espace vectoriel de F. ■

Définition 4 : Rang

Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$, E ou F de dimension finie.
On appelle **rang** de u l'entier $\operatorname{rg} u = \dim(\operatorname{Im} u)$.
Si $\mathscr{B}$ est une base de E, alors $\operatorname{rg} u = \operatorname{rg}\left(u(\mathscr{B})\right)$.

Remarque 4

On a toujours $\operatorname{rg} u \leqslant \min(\dim E, \dim F)$.

Propriété 5 : Majoration du rang d'une composée

Soit $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $v \in \mathscr{L}(F,G)$ de rang fini.
Alors $v \circ u$ l'est et $\operatorname{rg} v \circ u \leqslant \min(\operatorname{rg} u, \operatorname{rg} v)$.

Démonstration

$\operatorname{Im} v \circ u = v(u(E)) = \operatorname{Im} v_{|u(E)}$ de dimension au plus $\min(\operatorname{rg} v, \dim u(E)) = \min(\operatorname{rg} v, \operatorname{rg} u)$. ■

Propriété 6 : Effet sur le rang de la composition par un isomorphisme

On ne change pas le rang en composant à gauche ou à droite par un isomorphisme.

Démonstration

- Si $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $v \in \mathscr{L}(F,G)$ bijective. On veut montrer que $\operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{rg} u$.
  Si $\mathscr{B}$ est une base de $\operatorname{Im} u$, $v(\mathscr{B})$ est libre par injectivité de v et engendre $v(\operatorname{Im} u) = v \circ u(E) = \operatorname{Im}(v \circ u)$. C'est donc une base de $\operatorname{Im}(v \circ u)$ et
  $$\operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{taille}(v(\mathscr{B})) = \operatorname{taille}(\mathscr{B}) = \operatorname{rg} u.$$
- Si $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et $v \in \mathscr{L}(G,E)$ bijective. On veut montrer que $\operatorname{rg}(u \circ v) = \operatorname{rg} u$.
  Or $\operatorname{Im} u = u(E) = u(v(G)) = \operatorname{Im}(u \circ v)$ donc $\operatorname{rg} u = \operatorname{rg}(u \circ v)$.

Remarque 5

On a en fait montré qu'en composant à gauche par une application linéaire injective ou à droite par une application linéaire surjective, on ne change pas le rang.

5 Théorème du rang

Théorème 1 : Théorème et formule du rang

$u \in \mathscr{L}(E,F)$ induit un isomorphisme de tout supplémentaire H de $\operatorname{Ker} u$ sur $\operatorname{Im} u$.
*Si, de plus, E est de dimension finie, $\dim E = \dim \operatorname{Ker} u + \operatorname{rg} u$ appelée **formule du rang**.*

Remarque 6

⚠ En général, $\operatorname{Ker} u$ et $\operatorname{Im} u$ ne sont pas supplémentaires.

Exemple 2

$u : (x,y) \mapsto (y,0)$

Exemple 3

$$u : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (x+y-z, x+z) \end{array} \right.$$ $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Vect}(1,-2,-1)$ et $\operatorname{rg} u = 2$ donc u est surjective.

Corollaire 1

Si E est de dimension finie, u est injective si et seulement si $\operatorname{rg} u = \dim E$.
Si F est de dimension finie, u est surjective si et seulement si $\operatorname{rg} u = \dim F$.

Propriété 7 : Formule de Grassmann

Si F et G sont de dimension finie, alors

$$\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G).$$

Démonstration : Nouvelle preuve de la formule de Grassmann

Théorème du rang appliqué à $u : \left| \begin{array}{ccc} F \times G & \longrightarrow & F+G \\ (\vec{x}, \vec{y}) & \longmapsto & \vec{x}+\vec{y} \end{array} \right.$ ■

Démonstration : Nouvelle preuve de v injective $\Longrightarrow \operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{rg} u$

On a $\operatorname{Ker} u = \operatorname{Ker}(v \circ u)$ par injectivité de v, et le théorème du rang donne le résultat. ■

II ENDOMORPHISMES

1 Structure d'algèbre

Propriété 8

$(\mathscr{L}(E), +, \circ, \cdot)$ est une $\mathbb{K}$-algèbre non commutative et non intègre si $\dim E \geqslant 2$.

Notation 1

Si $u, v \in \mathscr{L}(E)$, on note $uv = u \circ v$, $u^n = \underbrace{u \circ \cdots \circ u}_{n \text{ fois}}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $u^0 = \mathrm{id}_E$.

Définition 5 : Polynôme en un endomorphisme

Si $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \in \mathbb{K}[X]$, on peut définir $P(u) = a_0 \mathrm{id}_E + a_1 u + \cdots + a_n u^n$.
Lorsque $P(u) = 0_{\mathscr{L}(E)}$, on dit que P est un **polynôme annulateur** de u.

Propriété 9

Si $u \in \mathscr{L}(E)$, l'application $\left| \begin{array}{ccc} (\mathbb{K}[X], +, \times, \cdot) & \longrightarrow & (\mathscr{L}(E), +, \circ, \cdot) \\ P & \longmapsto & P(u) \end{array} \right.$ *est un morphisme de $\mathbb{K}$-algèbres.*

⚠ *En particulier, $(P \times Q)(u) = P(u) \circ Q(u)$.*

Démonstration

La linéarité ne pose pas de problème, on a bien $1_{K[X]}(u) = \mathrm{id}_E$.

Si $P, Q \in \mathbb{K}[X]$, $(P \times Q)(u) = \sum_{k,\ell} a_k b_\ell u^{k+\ell} = \sum_k a_k u^k \left(\sum_\ell b_\ell u^\ell\right) = P(u) \circ Q(u)$ par linéarité de u. ■

Remarque 7

Deux polynômes en u commutent.

Propriété 10 : Binôme

Si $u, v \in \mathscr{L}(E)$ tels que $u \circ v = v \circ u$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(u+v)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^k v^{n-k}.$$

2 Groupe linéaire

Définition 6 : Groupe linéaire

L'ensemble des automorphismes de E est noté $\mathscr{GL}(E)$ appelé **groupe linéaire de** E.

Propriété 11

$(\mathscr{GL}(E), \circ)$ est un groupe.

Démonstration

C'est le groupe des inversibles de l'anneau $(\mathscr{L}(E), +, \circ)$ ou c'est un sous-groupe de $(\mathfrak{S}(E), \circ)$. ■

3 Projecteurs

Définition 7 : Projection

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et F, G deux sous-espaces supplémentaires : $F \oplus G = E$.
Tout vecteur $\vec{x}$ de E se décompose de manière unique sous la forme $\vec{x} = \vec{x}_F + \vec{x}_G$ où $\vec{x}_F \in F$ et $\vec{x}_G \in G$.
On appelle **projection** (ou **projecteur**) **sur** F **parallèlement à** G l'application

$$p : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ \vec{x} & \longmapsto & \vec{x}_F \end{array} \right.$$

On définit de même la projection q sur G parallèlement à F.
On dit que les projections p et q sont **associées.**

Propriété 12

Avec les notations ci-dessus :

(i) $p, q \in \mathscr{L}(E)$ *et* $p + q = \mathrm{id}_E$.

(ii) $F = \mathrm{Im}\, p = \mathrm{Ker}(p - \mathrm{id}_E) = \mathrm{Inv}\, p = \{\vec{x} \mid p(\vec{x}) = \vec{x}\}$.

(iii) $G = \mathrm{Ker}\, p$.

(iv) $p \circ q = q \circ p = 0_{\mathscr{L}(E)}$.

(v) $p^2 = p \circ p = p$ *(p est idempotent.)*

Remarques 2

R 1 – A savoir retrouver sur un dessin.

R 2 – On retiendra que $\vec{x} \in F = \operatorname{Im} p \iff \vec{x} \in \operatorname{Ker}(p - \mathrm{id}_E) \iff p(\vec{x}) = \vec{x}$.

Démonstration

■

Propriété 13 : Caractérisation des projections

p est une projection (vectorielle) sur E si et seulement si $p \in \mathscr{L}(E)$ et $p^2 = p \circ p = p$. Dans ce cas,

(*i*) $\operatorname{Im} p \oplus \operatorname{Ker} p = E$

(*ii*) *p est la projection sur $\operatorname{Im} p = \operatorname{Inv} p$ parallèlement à $\operatorname{Ker} p$*

Démonstration

■

Exemples 3

E 1 – $u : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,y) & \longmapsto & (4x-6y, 2x-3y) \end{array} \right.$ projection sur $D = \operatorname{Vect}(2,1)$ parallèlement à $D' = \operatorname{Vect}(3,2)$.

E 2 – Projection sur $D = \operatorname{Vect}(1,1,1)$ parallèlement à $P \ : \ x + z = 0$?

E 3 – Projection sur $\mathscr{P}$ (fonctions paires) parallèlement à $\mathscr{I}$ (fonctions impaires) ?

E 4 – Projection sur $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$ parallèlement à $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$?

4 Symétries

Définition 8 : Symétrie

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et F, G deux sous-espaces supplémentaires : $F \oplus G = E$.
Tout vecteur $\vec{x}$ de E se décompose de manière unique sous la forme $\vec{x} = \vec{x}_F + \vec{x}_G$ où $\vec{x}_F \in F$ et $\vec{x}_G \in G$.

On appelle **symétrie sur F parallèlement à G** l'application $s : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ \vec{x} & \longmapsto & \vec{x}_F - \vec{x}_G \end{array} \right.$ ie $s = p - q$ avec les notations précédentes.

Propriété 14

(*i*) $s \in \mathscr{L}(E)$

(*ii*) *s est involutive : $s^2 = s \circ s = \mathrm{id}_E$.*

(*iii*) $F = \operatorname{Ker}(s - \mathrm{id}_E) = \operatorname{Inv} s = \{\vec{x} \mid s(\vec{x}) = \vec{x}\}$.

(*iv*) $G = \operatorname{Ker}(s + \mathrm{id}_E) = \{\vec{x} \mid s(\vec{x}) = -\vec{x}\}$ (*anti-invariants*).

(*v*) *Si p projection sur F parallèlement à G, $s = 2p - \mathrm{id}_E$.*

Démonstration

■

Propriété 15 : Caractérisation des symétries

s est une symétrie (vectorielle) sur E si et seulement si $s \in \mathscr{L}(E)$ et $s^2 = s \circ s = \mathrm{id}_E$. Dans ce cas,

(i) $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E) = E$

(ii) *s est la projection sur $\mathrm{Ker}(s - \mathrm{id}_E)$ parallèlement à $\mathrm{Ker}(s + \mathrm{id}_E)$*

Démonstration

Exemples 4

E 1 – $u : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,y,z) & \longmapsto & (y,x,z) \end{array} \right.$ symétrie parallèlement à $P \ : \ x = y$ parallèlement à $D = \mathrm{Vect}(1,-1,0)$.

E 2 – Symétrie par rapport à $D = \mathrm{Vect}(1,1,1)$ parallèlement à $P \ : \ x + z = 0$.

E 3 – $f \mapsto \hat{f}$ où $\hat{f} : x \mapsto f(-x)$ sur $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$.

E 4 – $T : M \mapsto M^{\mathsf{T}}$ sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Remarque 8

Si $F = \{\vec{0}_E\}$, alors $G = E$ et $s = -\mathrm{id}_E$: symétrie centrale.

5 Affinités

Définition 9 : Affinité

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et F, G deux sous-espaces supplémentaires : $F \oplus G = E$.
Tout vecteur $\vec{x}$ de E se décompose de manière unique sous la forme $\vec{x} = \vec{x}_F + \vec{x}_G$ où $\vec{x}_F \in F$ et $\vec{x}_G \in G$.

On appelle **affinité de base F de direction G et de rapport $k \in \mathbb{K}$** l'application $f_k : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ \vec{x} & \longmapsto & \vec{x}_F + k\vec{x}_G \end{array} \right.$ ie $f_k = p + kq$ avec les notations précédentes.

Remarque 9

On retrouve homothéties, projections, symétries.

Propriété 16 : Caractérisation des affinités

f est une affinité si et seulement si $f \in \mathscr{L}(E)$ et $f = \mathrm{id}_E$ ou bien on a $k \in \mathbb{K}$ tel que $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(f - k\,\mathrm{id}_E) = E$.

Il s'agit alors de l'affinité de base $\mathrm{Ker}(f - \mathrm{id}_E)$, de direction $\mathrm{Ker}(f - k\,\mathrm{id}_E)$ et de rapport k.

III DÉTERMINATION D'UNE APPLICATION LINÉAIRE

1 Image d'une base

Propriété 17

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $\mathscr{B} = (\vec{e}_i)_{i\in I}$ une base de E. Pour $\vec{x} \in E$, on note $(x_i)_{i\in I}$ ses coordonnées dans $\mathscr{B}$.

Alors pour tout $i \in I$, l'application $\varphi_i : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ \vec{x} & \longmapsto & x_i \end{array} \right.$ est une forme linéaire (i^e coordonnée).

Propriété 18

Soient E, F deux espaces vectoriels, $\mathscr{B} = (\vec{e}_i)_{i\in I}$ une base de E et $\mathscr{F} = \left(\vec{f}_i\right)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de F.

Il existe une unique application linéaire $u \in \mathscr{L}(E,F)$ telle que $\forall\, i \in I,\ \ u(\vec{e}_i) = f_i$.

Remarque 10

Autrement dit, une application linéaire est entièrement déterminée par l'image d'une base.

Démonstration

Par analyse synthèse. ■

Exemple 4

$u(1,0,0) = (1,1)$; $u(0,1,0) = (1,0)$; $u(0,0,1) = (-1,2)$, traduction sur la matrice canoniquement associée.

Corollaire 2

Soit $\mathscr{B}$ une base de E, $u, v \in \mathscr{L}(E,F)$.
Alors $u = v$ si et seulement si $u(\mathscr{B}) = v(\mathscr{B})$.

Propriété 19

Soit $\mathscr{B}$ une base de E, $u \in \mathscr{L}(E,F)$.

- *u est injective si et seulement si $u(\mathscr{B})$ est libre.*
- *u est surjective si et seulement si $u(\mathscr{B})$ engendre F.*
- *u est un isomorphisme si et seulement si $u(\mathscr{B})$ est une base de F.*

Remarque 11

$u \in \mathscr{L}(E,F)$ est un isomorphisme si et seulement si l'image d'une base de E par u est une base de F.

Démonstration

■

2 Applications linéaires et dimensions

Propriété 20

Soient E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.
Alors $\dim E = \dim F \iff E$ et F sont isomorphes.

Démonstration

■

Remarque 12

L'étude de l'espace vectoriel $\mathbb{K}^p$ se reporte sur tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension p.

Propriété 21

Soient E, F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie tels que $\dim E = \dim F$ et $u \in \mathscr{L}(E,F)$. Alors

$$u \text{ injective} \iff u \text{ surjective} \iff u \text{ bijective.}$$

Remarque 13

C'est en particulier le cas pour tout endomorphisme en dimension finie.

Démonstration

Image d'une base. ■

Exemple 5

$u : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{K}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^{n+1} \\ P & \longmapsto & (P(x_0), P(x_1), \dots, P(x_n)) \end{array} \right.$ où $x_0, \dots, x_n$ sont deux à deux distincts est facilement injectif (noyau réduit à $0_{\mathbb{K}[X]}$) et $\dim \mathbb{K}_n[X] = \dim \mathbb{K}^{n+1}$ donc c'est un isomorphisme, ce qui redonne le résultat de l'interpolation de Lagrange.

Propriété 22

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie tels que $\dim E = \dim F = n$ et $u \in \mathscr{L}(E,F)$. Les propriétés suivantes sont équivalents :

(i) *u isomorphisme*
(ii) *u est inversible à gauche*
(iii) *u est inversible à droite*
(iv) $\operatorname{rg} u = n$

Démonstration

■

3 Dimension de $\mathscr{L}(E,F)$

Propriété 23

Soit E et F deux $\mathbb{K}$-espaces vectoriels de dimension finie.
Alors $\mathscr{L}(E,F)$ est de dimension finie et $\dim \mathscr{L}(E,F) = \dim E \times \dim F$.

Démonstration

Isomorphisme $u \mapsto u(\mathscr{B})$. ■

Remarque 14

⚠ : $\mathscr{L}(E)$ est de dimension $(\dim E)^2$.

4 Décomposition d'applications linéaires

Propriété 24

Si $E = E_1 \oplus E_2$, $u_1 \in \mathscr{L}(E_1,F)$, $u_2 \in \mathscr{L}(E_2,F)$, alors il existe une unique application linéaire $u \in \mathscr{L}(E,F)$ telle que, $u_{|E_1} = u_1$ et $u_{|E_2} = u_2$.

Démonstration

Analyse-synthèse. ■

IV FORMES LINÉAIRES ET HYPERPLANS

1 Cas général

E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

Définition 10 : Formes linéaires

On rappelle que les **formes linéaires** sont les $\varphi \in \mathscr{L}(E,\mathbb{K})$ et que $E^* = \mathscr{L}(E,\mathbb{K})$ est appelé espace dual de E.

Remarque 15

Si E est de dimension finie, E^* l'est et $\dim E^* = \dim E$.

Définition 11 : Hyperplan

On appelle **hyperplan** de E tout sous-espace de E égal au noyau d'une forme linéaire non nulle de E.

Théorème 2 : Caractérisation des hyperplans

Soit H un sous-espace vectoriel de E. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) *H est un hyperplan (noyau d'une forme linéaire non nulle : $\exists \varphi \in E^* \setminus \{0_{E^*}\}$, $H = \operatorname{Ker} \varphi$.)*

(ii) *H est un supplémentaire de toute droite $D \not\subset H$.*

(iii) *H est un supplémentaire d'une droite $D \not\subset H$.*

Démonstration

■

Corollaire 3

Soient $\varphi_1, \varphi_2 \in E^* \setminus \{0_{E^*}\}$.

$$\operatorname{Ker}\varphi_1 = \operatorname{Ker}\varphi_2 \iff \exists \lambda \in \mathbb{K}^*, \quad \varphi_1 = \lambda\varphi_2.$$

Démonstration

Si $\vec{x}_0 \notin H$, $\mathbb{K}\vec{x}_0$ est un supplémentaire de H et $\varphi_1 = \dfrac{\varphi_1(\vec{x}_0)}{\varphi_2(\vec{x}_0)}\varphi_2$. ■

2 Cas de la dimension finie

Propriété 25

Si E est de dimension finie n, les hyperplans de E sont exactement ses sous-espaces de dimension $n-1$.

Remarque 16 : Équation d'un hyperplan

Si $\mathscr{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ est une base de E et $H = \operatorname{Ker}\varphi$ un hyperplan.
Pour tout $\vec{x} \in E$, $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \cdots + x_n\vec{e}_n$ donc $\varphi(\vec{x}) = x_1\varphi(\vec{e}_1) + \cdots + x_n\varphi(\vec{e}_n)$.

Si on note $a_i = \varphi(\vec{e}_i)$, on obtient $\vec{x} \in H \iff a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$.
Réciproquement, toute équation de H donne une telle forme linéaire φ.

La dernière propriété de la partie précédente nous dit que toutes les équations de H sont colinéaires.

Propriété 26 : Dimension d'une intersection d'hyperplans

Si H_1, ..., H_m sont des hyperplans de E de dimension n, alors

$$\dim\left(\bigcap_{i=1}^{m} H_i\right) \geqslant n - m.$$

Remarque 17

La dimension de l'espace des solutions d'un système linéaire à m équations et n inconnues est au moins égal à $n - m$.

Démonstration

Par récurrence sur m avec la formule de Grassmann. ■

Propriété 27 : Système d'équations d'un sous-espace

Si F est un sous-espace vectoriel de E avec $\dim E = n$ et $\dim F = p$ tels que $p < n$, alors F est l'intersection de $n - p$ hyperplans distincts.

Démonstration

On complète une base de F en une base de E et on s'intéresse à la base duale. ■

Remarque 18

Cela traduit le fait que le sous-espace puisse être décrit par un système de $n-p$ équations indépendantes.

Exemple 6

Droites et plans de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.