

Applications linéaires

Dans tout le chapitre, \mathbb{K} désigne un corps commutatif de caractéristique nulle (\mathbb{R} ou \mathbb{C} au programme).

1 GÉNÉRALITÉS

1 Définition

Définition 1 : Application linéaire

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels et $u: E \rightarrow F$.

On dit que u est une **application linéaire** lorsque

$$\begin{cases} \forall \vec{x}, \vec{y} \in E, & u(\vec{x} + \vec{y}) = u(\vec{x}) + u(\vec{y}) \\ \forall \vec{x} \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, & u(\lambda \vec{x}) = \lambda u(\vec{x}) \end{cases}$$

ce qui s'écrit aussi

$$\forall \vec{x}, \vec{y} \in E, \forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad u(\vec{x} + \lambda \vec{y}) = u(\vec{x}) + \lambda u(\vec{y}).$$

On note $\mathcal{L}(E, F)$ l'ensemble des applications linéaires de E vers F .

- Si u est bijective, on parle d'**isomorphisme** (d'espaces vectoriels).
- Si $E = F$, on parle d'**endomorphisme** et on note $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E, E)$.
- Si $E = F$ et u est bijective, on parle d'**automorphisme**.
- Si $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$, on dit que φ est une **forme linéaire**.
- On note $\mathcal{L}(E, \mathbb{K}) = E^*$ appelé **dual** de E l'ensemble des formes linéaires sur E .

Définition 2 : Morphisme d'algèbre

Soit $(\mathcal{A}, +_{\mathcal{A}}, \times_{\mathcal{A}}, \cdot_{\mathcal{A}})$, $(\mathcal{B}, +_{\mathcal{B}}, \times_{\mathcal{B}}, \cdot_{\mathcal{B}})$ et $f: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$.

On dit que f est un **morphisme d'algèbres** lorsque

- f est linéaire,
- $\forall x, y \in \mathcal{A}, \quad f(x \times_{\mathcal{A}} y) = f(x) \times_{\mathcal{B}} f(y)$
- $f(1_{\mathcal{A}}) = 1_{\mathcal{B}}$.

2 Propriétés

Propriété 1

Soient E, F, G trois \mathbb{K} -espaces vectoriels et $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

(i) $u(\vec{0}_E) = \vec{0}_F$

(ii) $\forall \vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n \in E, \forall \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K},$

$$u\left(\sum_{i=1}^n \lambda_i \vec{x}_i\right) = \sum_{i=1}^n \lambda_i u(\vec{x}_i)$$

(iii) Si A est une partie de E , $u(\text{Vect } A) = \text{Vect}(u(A))$.

(iv) Si E' est un sous-espace vectoriel de E , $u|_{E'} \in \mathcal{L}(E', F)$ (u induit une application linéaire sur E').

(v) Si u est bijective (isomorphisme) alors $u^{-1} \in \mathcal{L}(F, E)$.

(vi) $(\mathcal{L}(E, F), +, \cdot)$ est un \mathbb{K} -espace vectoriel.

(vii) Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$, $v \circ u \in \mathcal{L}(E, G)$.

(viii) Si $u, u_1, u_2 \in \mathcal{L}(E, F)$, $v, v_1, v_2 \in \mathcal{L}(F, G)$, et $\lambda \in \mathbb{K}$

$$\begin{cases} v \circ (u_1 + \lambda u_2) = v \circ u_1 + \lambda v \circ u_2 \\ (v_1 + \lambda v_2) \circ u = v_1 \circ u + \lambda v_2 \circ u \end{cases}$$

(ix) Si E' est un sous-espace vectoriel de E et F' est un sous-espace vectoriel de F , $u(E')$ est un sous-espace vectoriel de F et $u^{-1}(F')$ est un sous-espace vectoriel de E .

3 Noyau et image

Définition 3 : Noyau et image

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

- Le **noyau** de u est

$$\text{Ker } u = u^{-1}(\{\vec{0}_F\}) = \{\vec{x} \in E \mid u(\vec{x}) = \vec{0}_F\} \in \mathcal{P}(E).$$

- L'**image** de u est

$$\text{Im } u = u(E) = \{u(\vec{x}) \mid \vec{x} \in E\} \in \mathcal{P}(F).$$



Propriété 2

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

- (i) $\text{Im } u$ et $\text{Ker } u$ sont des sous-espaces vectoriels de F et E respectivement.
- (ii) u est injective si et seulement si $\text{Ker } u = \{\vec{0}_E\}$.
- (iii) u est surjective si et seulement si $\text{Im } u = F$.
- (iv) Si E' est un sous-espace vectoriel de E , alors $\text{Ker } u|_{E'} = E' \cap \text{Ker } u$ et $\text{Im } u|_{E'} = u(E')$.

4 Image d'une famille de vecteurs, rang

Propriété 3

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $\mathcal{F} = (\vec{e}_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de E . On note $u(\mathcal{F}) = (u(\vec{e}_i))_{i \in I}$.

- (i) Si \mathcal{F} est liée, $u(\mathcal{F})$ l'est aussi.
- (ii) Si \mathcal{F} engendre E , $u(\mathcal{F})$ engendre $\text{Im } u$ (\triangleleft et non F si u n'est pas surjective!)
- (iii) Si \mathcal{F} est libre et u est injective, $u(\mathcal{F})$ est libre.
- (iv) Si u est un isomorphisme et \mathcal{B} est une base de E , alors $u(\mathcal{B})$ est une base de F .
En particulier, si E est de dimension finie, alors F l'est et $\dim E = \dim F$.

Propriété 4

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ avec E ou F de dimension finie.
Alors $\text{Im } u$ est de dimension finie au plus $\min(\dim E, \dim F)$.

Définition 4 : Rang

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$, E ou F de dimension finie.
On appelle **rang** de u l'entier $\text{rg } u = \dim(\text{Im } u)$.
Si \mathcal{B} est une base de E , alors $\text{rg } u = \text{rg}(u(\mathcal{B}))$.

Propriété 5 : Majoration du rang d'une composée

Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$ de rang fini.
Alors $v \circ u$ l'est et $\text{rg } v \circ u \leq \min(\text{rg } u, \text{rg } v)$.

Propriété 6 : Effet sur le rang de la composition par un isomorphisme

On ne change pas le rang en composant à gauche ou à droite par un isomorphisme.

5 Théorème du rang

Théorème 1 : Théorème et formule du rang

$u \in \mathcal{L}(E, F)$ induit un isomorphisme de tout supplémentaire H de $\text{Ker } u$ sur $\text{Im } u$.
Si, de plus, E est de dimension finie, $\dim E = \dim \text{Ker } u + \text{rg } u$ appelée **formule du rang**.

Corollaire 1

Si E est de dimension finie, u est injective si et seulement si $\text{rg } u = \dim E$.
Si F est de dimension finie, u est surjective si et seulement si $\text{rg } u = \dim F$.

Propriété 7 : Formule de Grassmann

Si F et G sont de dimension finie, alors
$$\dim(F + G) = \dim F + \dim G - \dim(F \cap G)$$

II ENDOMORPHISMES

1 Structure d'algèbre

Propriété 8

$(\mathcal{L}(E), +, \circ, \cdot)$ est une \mathbb{K} -algèbre non commutative et non intègre si $\dim E \geq 2$.

Notation 1

Si $u, v \in \mathcal{L}(E)$, on note $uv = u \circ v$, $u^n = \underbrace{u \circ \dots \circ u}_{n \text{ fois}}$
pour $n \in \mathbb{N}^*$ et $u^0 = \text{id}_E$.

Définition 5 : Polynôme en un endomorphisme

Si $P = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n \in \mathbb{K}[X]$, on peut définir $P(u) = a_0 \text{id}_E + a_1 u + \dots + a_n u^n$.
Lorsque $P(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$, on dit que P est un **polynôme annulateur** de u .

Propriété 9

Si $u \in \mathcal{L}(E)$, l'application $(\mathbb{K}[X], +, \times, \cdot) \rightarrow (\mathcal{L}(E), +, \circ, \cdot)$ est un morphisme de \mathbb{K} -algèbres.

$P \mapsto P(u)$

⚠ En particulier, $(P \times Q)(u) = P(u) \circ Q(u)$.

Propriété 12

Avec les notations ci-dessus :

- (i) $p, q \in \mathcal{L}(E)$ et $p + q = \text{id}_E$.
- (ii) $F = \text{Im } p = \text{Ker}(p - \text{id}_E) = \text{Inv } p = \{\vec{x} \mid p(\vec{x}) = \vec{x}\}$.
- (iii) $G = \text{Ker } p$.
- (iv) $p \circ q = q \circ p = 0_{\mathcal{L}(E)}$.
- (v) $p^2 = p \circ p = p$ (p est idempotent.)

Propriété 10 : Binôme

Si $u, v \in \mathcal{L}(E)$ tels que $u \circ v = v \circ u$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(u + v)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} u^k v^{n-k}.$$

Propriété 13 : Caractérisation des projections

p est une projection (vectorielle) sur E si et seulement si $p \in \mathcal{L}(E)$ et $p^2 = p \circ p = p$. Dans ce cas,

- (i) $\text{Im } p \oplus \text{Ker } p = E$
- (ii) p est la projection sur $\text{Im } p = \text{Inv } p$ parallèlement à $\text{Ker } p$

2 Groupe linéaire

Définition 6 : Groupe linéaire

L'ensemble des automorphismes de E est noté $\mathcal{GL}(E)$ appelé **groupe linéaire de E** .

Propriété 11

$(\mathcal{GL}(E), \circ)$ est un groupe.

3 Projecteurs

Définition 7 : Projection

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel, et F, G deux sous-espaces supplémentaires : $F \oplus G = E$.

Tout vecteur \vec{x} de E se décompose de manière unique sous la forme $\vec{x} = \vec{x}_F + \vec{x}_G$ où $\vec{x}_F \in F$ et $\vec{x}_G \in G$.

On appelle **projection** (ou **projecteur**) **sur F parallèlement à G** l'application

$$p : \begin{cases} E & \rightarrow & E \\ \vec{x} & \mapsto & \vec{x}_F \end{cases}$$

On définit de même la projection q sur G parallèlement à F .

On dit que les projections p et q sont **associées**.

4 Symétries

Définition 8 : Symétrie

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel, et F, G deux sous-espaces supplémentaires : $F \oplus G = E$.

Tout vecteur \vec{x} de E se décompose de manière unique sous la forme $\vec{x} = \vec{x}_F + \vec{x}_G$ où $\vec{x}_F \in F$ et $\vec{x}_G \in G$.

On appelle **symétrie sur F parallèlement à G** l'application s :

$$\begin{cases} E & \rightarrow & E \\ \vec{x} & \mapsto & \vec{x}_F - \vec{x}_G \end{cases} \text{ ie } s = p - q \text{ avec}$$

les notations précédentes.

Propriété 14

- (i) $s \in \mathcal{L}(E)$
- (ii) s est involutive : $s^2 = s \circ s = \text{id}_E$.
- (iii) $F = \text{Ker}(s - \text{id}_E) = \text{Inv } s = \{\vec{x} \mid s(\vec{x}) = \vec{x}\}$.
- (iv) $G = \text{Ker}(s + \text{id}_E) = \{\vec{x} \mid s(\vec{x}) = -\vec{x}\}$ (*anti-invariants*).
- (v) Si p projection sur F parallèlement à G , $s = 2p - \text{id}_E$.

Propriété 15 : Caractérisation des symétries

s est une symétrie (vectorielle) sur E si et seulement si $s \in \mathcal{L}(E)$ et $s^2 = s \circ s = \text{id}_E$. Dans ce cas,

- (i) $\text{Ker}(s - \text{id}_E) \oplus \text{Ker}(s + \text{id}_E) = E$
- (ii) s est la projection sur $\text{Ker}(s - \text{id}_E)$ parallèlement à $\text{Ker}(s + \text{id}_E)$



5 Affinités

Définition 9 : Affinité

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel, et F, G deux sous-espaces supplémentaires : $F \oplus G = E$.

Tout vecteur \vec{x} de E se décompose de manière unique sous la forme $\vec{x} = \vec{x}_F + \vec{x}_G$ où $\vec{x}_F \in F$ et $\vec{x}_G \in G$.

On appelle **affinité de base F de direction G et de rapport $k \in \mathbb{K}$** l'application

$$f_k : \begin{cases} E & \longrightarrow & E \\ \vec{x} & \longmapsto & \vec{x}_F + k\vec{x}_G \end{cases} \quad \text{ie } f_k = p + kq \text{ avec les notations précédentes.}$$

Propriété 16 : Caractérisation des affinités

f est une affinité si et seulement si $f \in \mathcal{L}(E)$ et $f = \text{id}_E$ ou bien on a $k \in \mathbb{K}$ tel que $\text{Ker}(f - \text{id}_E) \oplus \text{Ker}(f - k\text{id}_E) = E$.

Il s'agit alors de l'affinité de base $\text{Ker}(f - \text{id}_E)$, de direction $\text{Ker}(f - k\text{id}_E)$ et de rapport k .

Corollaire 2

Soit \mathcal{B} une base de E , $u, v \in \mathcal{L}(E, F)$.
Alors $u = v$ si et seulement si $u(\mathcal{B}) = v(\mathcal{B})$.

Propriété 19

Soit \mathcal{B} une base de E , $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

- u est injective si et seulement si $u(\mathcal{B})$ est libre.
- u est surjective si et seulement si $u(\mathcal{B})$ engendre F .
- u est un isomorphisme si et seulement si $u(\mathcal{B})$ est une base de F .

2 Applications linéaires et dimensions

Propriété 20

Soient E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie.

Alors $\dim E = \dim F \iff E$ et F sont isomorphes.

Propriété 21

Soient E, F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie tels que $\dim E = \dim F$ et $u \in \mathcal{L}(E, F)$.
Alors

$$u \text{ injective} \iff u \text{ surjective} \iff u \text{ bijective.}$$

Propriété 22

Soit E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie tels que $\dim E = \dim F = n$ et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- | | |
|----------------------------------|-----------------------------------|
| (i) u isomorphisme | (iii) u est inversible à droite |
| (ii) u est inversible à gauche | (iv) $\text{rg } u = n$ |

3 Dimension de $\mathcal{L}(E, F)$

Propriété 23

Soit E et F deux \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie.

Alors $\mathcal{L}(E, F)$ est de dimension finie et $\dim \mathcal{L}(E, F) = \dim E \times \dim F$.

III DÉTERMINATION D'UNE APPLICATION LINÉAIRE

1 Image d'une base

Propriété 17

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel et $\mathcal{B} = (\vec{e}_i)_{i \in I}$ une base de E . Pour $\vec{x} \in E$, on note $(x_i)_{i \in I}$ ses coordonnées dans \mathcal{B} .

Alors pour tout $i \in I$, l'application

$$\varphi_i : \begin{cases} E & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ \vec{x} & \longmapsto & x_i \end{cases} \quad \text{est une forme linéaire (i}^\circ \text{ coordonnée).}$$

Propriété 18

Soient E, F deux espaces vectoriels, $\mathcal{B} = (\vec{e}_i)_{i \in I}$ une base de E et $\mathcal{F} = (\vec{f}_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs de F .

Il existe une unique application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que $\forall i \in I, u(\vec{e}_i) = \vec{f}_i$.

4 Décomposition d'applications linéaires

Propriété 24

Si $E = E_1 \oplus E_2$, $u_1 \in \mathcal{L}(E_1, F)$, $u_2 \in \mathcal{L}(E_2, F)$, alors il existe une unique application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ telle que, $u|_{E_1} = u_1$ et $u|_{E_2} = u_2$.

2 Cas de la dimension finie

Propriété 25

Si E est de dimension finie n , les hyperplans de E sont exactement ses sous-espaces de dimension $n - 1$.

Propriété 26 : Dimension d'une intersection d'hyperplans

Si H_1, \dots, H_m sont des hyperplans de E de dimension n , alors

$$\dim \left(\bigcap_{i=1}^m H_i \right) \geq n - m.$$

Propriété 27 : Système d'équations d'un sous-espace

Si F est un sous-espace vectoriel de E avec $\dim E = n$ et $\dim F = p$ tels que $p < n$, alors F est l'intersection de $n - p$ hyperplans distincts.

IV FORMES LINÉAIRES ET HYPERPLANS

1 Cas général

E désigne un \mathbb{K} -espace vectoriel.

Définition 10 : Formes linéaires

On rappelle que les **formes linéaires** sont les $\varphi \in \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ et que $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ est appelé espace dual de E .

Définition 11 : Hyperplan

On appelle **hyperplan** de E tout sous-espace de E égal au noyau d'une forme linéaire non nulle de E .

Théorème 2 : Caractérisation des hyperplans

Soit H un sous-espace vectoriel de E . Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (i) H est un hyperplan (noyau d'une forme linéaire non nulle : $\exists \varphi \in E^* \setminus \{0_{E^*}\}, H = \text{Ker } \varphi$.)
- (ii) H est un supplémentaire de toute droite $D \not\subset H$.
- (iii) H est un supplémentaire d'une droite $D \not\subset H$.

Corollaire 3

Soient $\varphi_1, \varphi_2 \in E^* \setminus \{0_{E^*}\}$.

$$\text{Ker } \varphi_1 = \text{Ker } \varphi_2 \iff \exists \lambda \in \mathbb{K}^*, \varphi_1 = \lambda \varphi_2.$$