

# Représentation matricielle des applications linéaires

Extrait du programme officiel :

## Matrices et applications linéaires

CONTENUS	CAPACITÉS & COMMENTAIRES
<b>a) Matrice d'une application linéaire dans des bases</b>	
Matrice d'un vecteur, d'une famille de vecteurs dans une base, d'une application linéaire dans un couple de bases, d'un endomorphisme dans une base.	Exemple : matrice, dans la base $(1, i)$ de $\mathbb{C}$ vu comme plan vectoriel réel, de la similitude de multiplicateur $a + ib$ .
Isomorphisme d'espaces vectoriels de $\mathcal{L}(E, F)$ sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ induit par le choix d'un couple de bases.	
Isomorphisme d'espaces vectoriels et d'anneaux de $\mathcal{L}(E)$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ induit par le choix d'une base.	
Coordonnées de l'image d'un vecteur par une application linéaire.	
Matrice d'une composée d'applications linéaires. Lien entre matrices inversibles et isomorphismes.	Cas particulier des endomorphismes.
<b>b) Application linéaire canoniquement associée à une matrice</b>	
Application linéaire canoniquement associée à une matrice.	On identifie ici $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et $\mathbb{K}^n$ .
Noyau, image et rang d'une matrice.	Les colonnes engendrent l'image, les lignes donnent un système d'équations du noyau.
Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si son noyau est réduit au sous-espace nul, ou si et seulement si ses colonnes engendrent l'espace $\mathbb{K}^n$ ou si et seulement si son rang est $n$ .	Retour sur la condition d'inversibilité d'une matrice triangulaire.
Toute matrice carrée inversible à gauche ou à droite est inversible.	Lien entre les diverses notions de rang.
<b>c) Systèmes linéaires</b>	
Interprétation de l'ensemble des solutions d'un système homogène comme noyau d'une matrice. Rang d'un tel système, dimension de l'espace des solutions.	
Le système $AX = B$ est compatible si et seulement si $B$ appartient à l'image de $A$ .	Structure affine de l'ensemble des solutions.
Si $A$ est carrée et inversible, le système $AX = B$ possède une unique solution.	Dans ce cas, le système est dit de Cramer.
<b>Changements de bases, équivalence et similitude</b>	
<b>a) Changements de bases</b>	
Matrice de passage d'une base à une autre.	
Inversibilité et inverse d'une matrice de passage.	
Effet d'un changement de base sur la matrice d'un vecteur.	
Effet d'un changement du couple de bases sur la matrice d'une application linéaire.	
Effet d'un changement de base sur la matrice d'un endomorphisme.	Exemples de recherche d'une base dans laquelle la matrice d'un endomorphisme donné est simple.
<b>b) Matrices équivalentes et rang</b>	
Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ est de rang $r$ , il existe un couple de bases dans lequel $u$ a pour matrice $J_r$ .	La matrice $J_r$ a tous ses coefficients nuls à l'exception des $r$ premiers coefficients diagonaux, égaux à 1.
Matrices équivalentes.	



## CONTENUS

Une matrice est de rang  $r$  si et seulement si elle est équivalente à  $J_r$ .

Invariance du rang par transposition.

Rang d'une matrice extraite. Caractérisation du rang par les matrices carrées extraites.

Les opérations élémentaires sur les colonnes (resp. lignes) conservent l'image (resp. le noyau). Les opérations élémentaires conservent le rang.

## CAPACITÉS &amp; COMMENTAIRES

Classification des matrices équivalentes par le rang.

Application : calcul du rang.

---

**c) Matrices semblables et trace**


---

Matrices semblables.

Interprétation géométrique.  
Exemples de recherche d'une matrice simple semblable à une matrice donnée.

Trace d'une matrice carrée.

Notation  $\text{tr}(A)$ .

Linéarité de la trace, relation  $\text{tr}(AB) = \text{tr}(BA)$ , invariance par similitude.

Trace d'un endomorphisme d'un espace de dimension finie. Linéarité, relation  $\text{tr}(uv) = \text{tr}(vu)$ .

Notation  $\text{tr}(u)$ .  
Trace d'un projecteur.

---

# Table des matières

<b>25 Représentation matricielle des applications linéaires</b>	<b>1</b>
<b>I Matrices et applications linéaires</b>	<b>3</b>
1 Matrice d’une application linéaire dans des bases . . . . .	3
a Matrice d’un ou plusieurs vecteurs . . . . .	3
b Matrice d’une application linéaire . . . . .	5
c Images de vecteurs et matrices . . . . .	7
d Composition d’applications linéaires et matrices . . . . .	8
2 Application linéaire canoniquement associée . . . . .	9
a Définition . . . . .	9
b Image, noyau, rang d’une matrice . . . . .	9
<b>II Systèmes linéaires</b>	<b>11</b>
<b>III Changements de bases, équivalence, similitude</b>	<b>12</b>
1 Changements de bases . . . . .	12
a Matrices de passage . . . . .	12
b Formules de changement de bases . . . . .	13
2 Matrices équivalentes et rang . . . . .	15
a Relation d’équivalence . . . . .	15
b Lien avec le rang . . . . .	15
3 Rang et matrices extraites . . . . .	17
4 Opérations élémentaires . . . . .	18
<b>IV Matrices semblables</b>	<b>20</b>
1 Définition . . . . .	20
2 Propriétés . . . . .	20
3 Trace d’un endomorphisme . . . . .	22
4 Diagonalisation (spé) . . . . .	22

## MATRICES ET APPLICATIONS LINÉAIRES

### 1 Matrice d’une application linéaire dans des bases

#### a Matrice d’un ou plusieurs vecteurs

##### Définition 1 : Matrice d’un vecteur

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n \neq 0$  et  $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$  une base de  $E$ .  
 Si  $\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + \dots + x_n \vec{e}_n \in E$ , de coordonnées  $(x_1, \dots, x_n)$  dans  $\mathcal{B}$ , on appelle **matrice de  $\vec{x}$  dans la base  $\mathcal{B}$**  la matrice colonne

$$X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$$



**Remarque 1**

On notera aussi  $\vec{x} \xleftrightarrow{\mathcal{B}} X$  (notation maison).

**Propriété 1**

L'application  $\left\{ \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ \vec{x} \longmapsto X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\vec{x}) \end{array} \right.$  est un isomorphisme.

**Remarque 2**

On retiendra que

$$\alpha \vec{x} + \beta \vec{y} \xleftrightarrow{\mathcal{B}} \alpha X + \beta Y.$$

**Exemples 1**

E1 – Si  $E = \mathbb{K}^n$  muni de sa base canonique  $\mathcal{B}_c$ ,  $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \xleftrightarrow{\mathcal{B}_c} X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ .

E2 – Pour  $E = \mathbb{K}_n[X]$  muni de sa base canonique  $\mathcal{B}_c$ ,

$$P = a_0 + a_1 X + \dots + a_n X^n \xleftrightarrow{\mathcal{B}_c} \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}.$$

Si  $\mathcal{B} = (1, X - a, \dots, (X - a)^n)$ ,

$$P \xleftrightarrow{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} P(a) \\ P'(a) \\ \vdots \\ \frac{P^{(n)}(a)}{n!} \end{pmatrix}$$

d'après la formule de Taylor.

**Définition 2 : Matrice d'une famille de vecteurs**

Soient  $n, p \in \mathbb{N}^*$ ,  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$ ,  $\mathcal{F} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p) \in E^p$  une famille de  $p$  vecteurs de  $E$ ,  $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$  une base de  $E$ .

Pour tout  $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , on note  $(x_{1,j}, \dots, x_{n,j})$  les coordonnées de  $\vec{x}_j$  dans la base  $\mathcal{B}$  (ie  $\vec{x}_j \xleftrightarrow{\mathcal{B}} X_j = \begin{pmatrix} x_{1,j} \\ \vdots \\ x_{n,j} \end{pmatrix}$ ).

On appelle **matrice de la famille  $\mathcal{F}$  dans la base  $\mathcal{B}$**  la matrice rectangulaire

$$A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p) = \left( X_1 \mid X_2 \mid \dots \mid X_p \right) = \begin{pmatrix} x_{1,1} & \dots & x_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n,1} & \dots & x_{n,p} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

On place dans les colonnes les coordonnées dans  $\mathcal{B}$  des vecteurs de  $\mathcal{F}$  :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \left( \begin{array}{c|c|c|c|c} & & & & \\ & & & & \\ & & & \dots & \\ & & & & \\ & & & & \end{array} \right) \begin{array}{l} \text{selon } \vec{e}_1 \\ \text{selon } \vec{e}_2 \\ \vdots \\ \text{selon } \vec{e}_n \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & \dots & \uparrow \\ \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \dots & \vec{x}_p \end{array}$$

**Remarque 3**

La matrice est carrée lorsque le nombre de vecteurs est  $\dim E$ .

**Propriété 2**

L'application

$$\begin{array}{l} E^p \longrightarrow \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p) \longmapsto A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p) \end{array}$$

est un isomorphisme.

**Exemples 2**

**E1** – Dans  $\mathbb{R}^3$ , matrice dans la base canonique de  $\vec{x}_1 = (0,1,2)$ ,  $\vec{x}_2 = (1,2,3)$ ,  $\vec{x}_3 = (1,1,1)$  et  $\vec{x}_4 = (3,6,9)$ . Alors

$$\text{Mat}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_4) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 9 \end{pmatrix}.$$

Dans  $\mathbb{R}^3$  muni de la base  $\mathcal{B} = ((0,0,1), (0,1,1), (1,1,1))$ ,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_4) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

**E2** –  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = I_n$

**E3** –  $E = \text{Vect}_{\mathbb{C}}(\cos, \sin) = \text{Vect}_{\mathbb{C}}(f, g)$ ,  $f : x \mapsto e^{ix}$ ,  $g : x \mapsto e^{-ix}$ .

$$\text{Mat}_{(\cos, \sin)}(f, g) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ i & -i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}) \quad \text{Mat}_{(f, g)}(\cos, \sin) = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2i \\ 1/2 & -1/2i \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C}).$$

Lien entre les deux matrices ?

**b** **Matrice d'une application linéaire**

**Définition 3 : Matrice d'une application linéaire**

Soient  $n, p \in \mathbb{N}^*$ ,  $E, F$  des  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie,  $p = \dim E$  et  $n = \dim F$ ,  $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$  une base de  $E$  et  $\mathcal{C} = (\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n)$  une base de  $F$  et  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ .

On appelle **matrice de l'application linéaire  $u$  dans les bases  $\mathcal{B}$  au départ et  $\mathcal{C}$  à l'arrivée** la matrice rectangulaire

$$A = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u) = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(u(\mathcal{B})) = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(u(\vec{e}_1), \dots, u(\vec{e}_p)) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$



Lorsque  $u \in \mathcal{L}(E)$  ( $E = F$  : endomorphisme) et  $\mathcal{B} = \mathcal{C}$ , on note  $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u(\mathcal{B})) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .

**Remarques 1**

R1 – On notera aussi  $u \xleftrightarrow[\mathcal{C}, \mathcal{B}]{\mathcal{C}, \mathcal{B}} A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  si  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $u \xleftrightarrow[\mathcal{B}]{\mathcal{B}} A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  si  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Cette notation s’avérera pratique pour les changements de bases et les compositions.

R2 – On place dans les colonnes les coordonnées dans  $\mathcal{C}$  des images par  $u$  des vecteurs de  $\mathcal{B}$  :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u) = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ & & \dots & \\ | & | & & | \\ \leftarrow \vec{f}_1 & & & \leftarrow \vec{f}_2 \\ & & & \vdots \\ & & & \leftarrow \vec{f}_n \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ u(\vec{e}_1) & u(\vec{e}_2) & \dots & u(\vec{e}_p) \end{matrix}$$

**Exemples 3**

E1 –  $u : (x, y, z) \rightarrow (x + y - z, x + z)$  dans les bases canoniques.

E2 –  $u : \begin{matrix} \mathbb{R}_5[X] & \rightarrow & \mathbb{R}_4[X] \\ P & \mapsto & P' \end{matrix}$  dans les bases canoniques.

E3 –  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\text{id}_E) = I_n$ .

**⚠** Faux si  $\mathcal{C} \neq \mathcal{B}$  !

$E = \mathbb{R}^3$ ,  $\mathcal{C}$  base canonique et  $\mathcal{B} = ((1, 0, 0), (1, 1, 0), (1, 1, 1))$ .

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(\text{id}_E) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq I_3 !$$

E4 – Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}$  et  $u : z \in \mathbb{C} \mapsto (a + ib)z$ . Matrice de l’endomorphisme  $u$  dans la base  $(1, i)$ .

**Propriété 3**

L’application

$$\begin{matrix} \mathcal{L}(E, F) & \rightarrow & \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ u & \mapsto & A = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u) \end{matrix}$$

est un isomorphisme (d’espaces vectoriels.)

**Remarque 4**

On retiendra que si  $u \xleftrightarrow[\mathcal{C}, \mathcal{B}]{\mathcal{C}, \mathcal{B}} A$  et  $v \xleftrightarrow[\mathcal{C}, \mathcal{B}]{\mathcal{C}, \mathcal{B}} B$ , alors

$$\alpha u + \beta v \xleftrightarrow[\mathcal{C}, \mathcal{B}]{\mathcal{C}, \mathcal{B}} \alpha A + \beta B.$$

**Démonstration**

La bijectivité vient du fait qu’une application linéaire est uniquement déterminée par l’image d’une base. (composée de  $u \mapsto u(\mathcal{B})$  et de l’isomorphisme précédent). ■

**Remarque 5**

On retrouve que  $\dim(\mathcal{L}(E, F)) = \dim E \times \dim F$ .

**Exercice 1**

Montrer que toute projection peut être représentée par une matrice de la forme  $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , que toute symétrie peut être représentée par une matrice de la forme  $\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & -I_{n-p} \end{pmatrix}$ , que toute affinité de rapport  $k$  peut être représentée par un matrice de la forme  $\begin{pmatrix} I_p & 0 \\ 0 & kI_{n-p} \end{pmatrix}$ .

**C Images de vecteurs et matrices**

**Propriété 4 : Images de vecteurs et matrices**

Soient  $n, p \in \mathbb{N}^*$ ,  $E, F$  des  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie,  $p = \dim E$  et  $n = \dim F$ ,  $\mathcal{B}$  une base de  $E$  et  $\mathcal{C}$  une base de  $F$  et  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ .

Pour tout  $\vec{x} \in E$ ,

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}}(u(\vec{x})) = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\vec{x}).$$

Autrement dit,  $y = u(x)$  se traduit matriciellement par  $Y = AX$  avec des notations évidentes.

**Remarque 6**

Autrement dit, si  $x \xleftrightarrow{\mathcal{B}} X$ ,  $u \xleftrightarrow{\mathcal{C}, \mathcal{B}} A$  et  $y = u(x) \xleftrightarrow{\mathcal{C}} Y$  alors

$$Y = \begin{matrix} A & X \\ \mathcal{C}, \mathcal{B} & \mathcal{B} \\ n,1 & n,p \quad p,1 \end{matrix}$$

**Démonstration**

$\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ ,  $C_1, \dots, C_p$  les colonnes de  $A$ .

$$\vec{y} = u(\vec{x}) = u(x_1\vec{e}_1 + \dots + x_p\vec{e}_p) = x_1u(\vec{e}_1) + \dots + x_pu(\vec{e}_p) \xleftrightarrow{\mathcal{C}} x_1C_1 + \dots + x_pC_p = AX.$$

(c'est un produit par blocs!)

**Exemple 1**

Soit  $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_3[X], \mathbb{R}_2[X])$  dont la matrice dans les bases  $(1, X-1, X^2-2, X^3-3)$  au départ et  $(1, X-1, (X-1)^2)$  à l'arrivée est  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

$$P = X^2 + X = 3 + (X-1) + (X^2-2), \text{ alors } u(P) \xleftrightarrow{\mathcal{C}} 3C_1 + C_2 + C_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Donc  $u(P) = 8 + (X-1) + 3(X-1)^2$ .



**d** Composition d'applications linéaires et matrices

**Propriété 5 : Matrice d'une composée**

Soient  $n, p, q \in \mathbb{N}^*$ ,  $E, F, G$  des  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie,  $p = \dim E$ ,  $n = \dim F$ ,  $q = \dim G$ ,  $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$  une base de  $E$ ,  $\mathcal{C} = (\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n)$  une base de  $F$ ,  $\mathcal{D} = (\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_q)$  une base de  $G$ ,  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $v \in \mathcal{L}(F, G)$ .

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{D}}(v \circ u) = \text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{D}}(v) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u).$$

**Remarque 7**  
Autrement dit, si  $u \xrightarrow[\mathcal{C}, \mathcal{B}]{} A$ ,  $v \xrightarrow[\mathcal{D}, \mathcal{C}]{} B$  et  $v \circ u \xrightarrow[\mathcal{D}, \mathcal{B}]{} C$  alors

$$C = \underset{q,p}{\text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{D}}(v)} \times \underset{q,n}{\text{Mat}_{\mathcal{D}, \mathcal{C}}(u)} \times \underset{n,p}{\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u)}$$

**Démonstration**

- **1ère méthode** : On note  $C_j$  les colonnes de  $A$ .  
 $u(\vec{e}_j) \xrightarrow[\mathcal{C}]{} C_j$  et  $v \xrightarrow[\mathcal{D}, \mathcal{C}]{} B$  donc  $v \circ u(\vec{e}_j) \xrightarrow[\mathcal{D}]{} BC_j$   
Or  $BC_j$  est bien la  $j^{\text{ème}}$  colonne de  $B \times A$ .
- **2ème méthode** : La  $j^{\text{ème}}$  colonne de  $C = \text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{D}}(v \circ u)$  contient les coordonnées de  $v \circ u(\vec{e}_j)$  dans la base  $\mathcal{D} = (\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_q)$  une base de  $G$ .  
Les coordonnées de  $u(\vec{e}_j)$  dans  $\mathcal{C} = (\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n)$  se trouvent dans la  $j^{\text{ème}}$  colonne de  $A$ .  
Donc  $v \circ u(\vec{e}_j) = v\left(\sum_{k=1}^n a_{k,j} \vec{f}_k\right) = \sum_{k=1}^n a_{k,j} v(\vec{f}_k)$ .  
Or les coordonnées de  $v(\vec{f}_k)$  dans  $\mathcal{D} = (\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_q)$  se trouvent dans la  $i^{\text{ème}}$  colonne de  $B$ .  
Donc  $v(\vec{f}_k) = \sum_{i=1}^q b_{i,k} \vec{g}_i$ . Soit finalement
$$v \circ u(\vec{e}_j) = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^q b_{i,k} a_{k,j} \vec{g}_i = \sum_{i=1}^q \left( \sum_{k=1}^n b_{i,k} a_{k,j} \right) \vec{g}_i$$

ce qui nous redonne bien la  $j^{\text{ème}}$  colonne de  $B \times A$ . ■

**Propriété 6 : Isomorphisme de  $\mathbb{K}$ -algèbres**

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$ ,  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ .

$$\begin{cases} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ u & \longmapsto & \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \end{cases}$$

est un isomorphisme de  $\mathbb{K}$ -algèbres.

**Remarque 8**  
Cela permet de retrouver les propriétés classiques du produit matriciel : associativité, bilinéarité, etc.

**Propriété 7 : Caractérisations de l'inversibilité**

Soient  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Sont équivalentes :

- (i)  $A$  est inversible
- (ii) Toute application linéaire représentée par  $A$  est un isomorphisme

- (iii)  $A$  représente un isomorphisme
  - (iv)  $A$  est inversible à gauche ou à droite
- De plus, si c'est le cas et si  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  tel que  $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u)$ , alors  $A^{-1} = \text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(u^{-1})$ .

**Démonstration**

- (i)  $\Rightarrow$  (ii) : Si  $A$  est inversible et  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  tel que  $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u)$ , soit  $v \in \mathcal{L}(F, E)$  tel que  $A^{-1} = \text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(v)$ . Alors  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(v \circ u) = I_n = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\text{id}_E)$  donc  $v \circ u = \text{id}_E$ . Donc  $u$  est inversible à gauche et comme  $\dim E = \dim F = n$ ,  $u$  est un isomorphisme.
- (ii)  $\Rightarrow$  (iii) : ok.
- (iii)  $\Rightarrow$  (i) : Si  $A$  est inversible et  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  isomorphisme tel que  $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u)$ . Si  $B = \text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(u^{-1})$ , alors  $A \times B = B \times A = I_n$  donc  $A$  est inversible.
- (i)  $\Rightarrow$  (iv) : ok.
- (iv)  $\Rightarrow$  (i) : Si  $A$  est inversible à gauche et  $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ ,  $\mathcal{B}$  la base canonique de  $\mathbb{K}^n$ , tels que  $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ . On a  $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  tel que  $B \times A = I_n$ . Soit  $v \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$  tel que  $B = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(v)$ . Alors  $v \circ u = \text{id}_{\mathbb{K}^n}$ . Donc  $u$  endomorphisme inversible à gauche en dimension finie donc un isomorphisme donc  $A$  est inversible. Idem à droite. ■

## 2 Application linéaire canoniquement associée

**a** Définition

**Définition 4 : Application linéaire canoniquement associée**

Soient  $n, p \in \mathbb{N}^*$ ,  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ .  
 On appelle **application linéaire canoniquement associée à  $A$**  l'unique  $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$  dont la matrice dans les bases canoniques est  $A$ .

Ainsi, écrire  $(y_1, \dots, y_n) = u(x_1, \dots, x_p)$  revient à écrire  $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$ .  
 Les colonnes de  $A$  contiennent les images par  $u$  des vecteurs de la base canonique de  $\mathbb{K}^p$ .

**Exemple 2**

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,3}(\mathbb{K})$ . Application linéaire canoniquement associée :

$$u : \begin{cases} \mathbb{K}^3 & \rightarrow & \mathbb{K}^2 \\ (x, y, z) & \mapsto & (x + 2y + 3z, 4x + 5y + 6z) \end{cases}$$

**b** Image, noyau, rang d'une matrice

**Définition 5 : Image, noyau, rang d'une matrice**

Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ ,  $u$  l'application linéaire canoniquement associée à  $A$ . On définit l'**image**, le **noyau** et le **rang** de  $A$  par :

$$\text{Ker } A = \left\{ X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \mid AX = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \text{ correspondant à } \text{Ker } u = \{ \vec{x} \in \mathbb{K}^p \mid u(\vec{x}) = \vec{0}_{\mathbb{K}^n} \}$$

$$\text{Im } A = \{ AX \mid X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \} \text{ correspondant à } \text{Im } u = \{ u(\vec{x}) \mid \vec{x} \in \mathbb{K}^p \}$$

$$\text{rg } A = \text{rg } u = \dim(\text{Im } A)$$



**Remarque 9**

Si, plus généralement,  $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u)$  alors  $\text{Ker } A$  contient les vecteurs colonnes représentant les éléments dans  $\text{Ker } u$  dans  $\mathcal{B}$  et  $\text{Im } A$  contient les vecteurs colonnes représentant les éléments dans  $\text{Im } u$  dans  $\mathcal{C}$ .

**Propriété 8 : Image, rang et colonnes ; formule du rang**

Soit  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  de colonnes  $C_1, \dots, C_p$ .

- (i)  $\text{Im } A = \text{Vect}(C_1, \dots, C_p)$ .
- (ii)  $\text{rg } A = \text{rg}(C_1, \dots, C_p)$ .
- (iii)  $\text{rg } A + \dim(\text{Ker } A) = p$ .

**Remarques 2**

- R1 –  $\text{Ker } A$  est décrit par un système d'équations homogène de matrice  $A$  elle-même.
- R2 – Des opérations élémentaires sur les éléments de  $(C_1, \dots, C_p)$  ne changent pas l'espace vectoriel qu'ils engendrent et donc leur rang. Ainsi, des opérations élémentaires sur les colonnes de  $A$  ne changent pas son rang.

**Exemple 3**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 2 \\ 3 & 6 & 2 \end{pmatrix}$$

$\text{Ker } A = \text{Vect} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 9 \end{pmatrix}$  donc  $2C_1 - 4C_2 + 9C_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ .

$\text{rg } A = 3 - 1 = 2, \text{Im } A = \mathbb{R}^2$ .

Si

$$u : \begin{cases} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow \mathbb{R}_1[X] \\ P = a + bX + cX^2 & \longmapsto (a + 5b + 2c) + (3a + 6b + 2c)X \end{cases}$$

alors  $u$  est linéaire et représentée par  $A$  dans les bases canoniques (attention : ce n'est pas l'application linéaire canoniquement associée à  $A$ !).

D'après l'étude précédente,  $\text{Ker } u = \text{Vect}(2 - 4X + 9X^2)$  et  $\text{Im } u = \mathbb{R}_1[X]$ .

**Propriété 9 : Caractérisations de l'inversibilité**

Sont équivalentes :

- (i)  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est inversible
- (ii) Son application linéaire canoniquement associée  $u$  est un automorphisme
- (iii)  $\text{Ker } A = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$
- (iv)  $\text{rg } A = n$
- (v) Les colonnes de  $A$  engendrent  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$
- (vi) Les colonnes de  $A$  forment une famille libre

**Démonstration**

(i)  $\iff$  (ii) est déjà connu, puis  $\text{Ker } A = \text{Ker } u$  et  $\text{rg } A = \text{rg } u$  et la dimension est finie donnent directement  
 (ii)  $\iff$  (iii)  $\iff$  (iv). ■

**Remarque 10**

Cela permet de justifier la méthode décrite dans le chapitre précédent pour inverser une matrice :  $\vec{y} = A\vec{x}$  admet une unique solution si et seulement si  $A\vec{x} = 0$  admet comme unique solution la solution nulle si et seulement si  $\text{Ker } A$  est réduit à  $0$ ...

## II SYSTÈMES LINÉAIRES

**Définition 6 : Rang d'un système**

Soit  $S$  un système linéaire à coefficients dans  $\mathbb{K}$  de  $n$  équations à  $p$  inconnue,  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  sa matrice.

Le système se traduit par  $AX = B$  d'inconnue  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$  et de second membre  $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$ .

On appelle **rang du système** le rang de sa matrice  $A$  :  $\text{rg } S = \text{rg } A$ .

On dit que le système est **compatible** lorsqu'il admet au moins une solution.

**Remarques 3**

**R1** – On a aussi

$$\begin{aligned} S &\Leftrightarrow u(x_1, \dots, x_p) = (b_1, \dots, b_n) \\ &\Leftrightarrow (x_1, \dots, x_p) \in u^{(-1)}(\{(b_1, \dots, b_n)\}) \end{aligned}$$

où  $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^p, \mathbb{R}^n)$  est l'application linéaire canoniquement associée à  $A$ .

**R2** –  $\text{rg } S \leq \min(n, p)$ .

**Propriété 10 : Structure de l'espace des solutions**

L'ensemble des solutions  $\mathcal{S}_H$  du système homogène associé à  $S$  est le noyau de sa matrice  $A$ . C'est un espace vectoriel de dimension  $p - \text{rg } S$ .

L'ensemble des solutions de  $S$  est soit vide, soit de la forme  $\mathcal{S}_S = X_0 + \mathcal{S}_H$  où  $X_0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ \vdots \\ x_p^0 \end{pmatrix}$  est une solution particulière de  $S$ .

On parle de sous-espace affine de direction  $\mathcal{S}_H$ , de dimension  $\dim \mathcal{S}_H = p - \text{rg } S$ .

**Propriété 11 : CNS de compatibilité**

Le système  $AX = B$  est compatible si et seulement si  $B \in \text{Im } A$ .

**Propriété 12 : Système de Cramer**

- (i) Le système est dit de **Cramer** lorsque  $n = p = \text{rg } S$  i.e.  $A$  inversible. Alors pour tout  $B \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ , il y a une unique solution.
- (ii) Si  $\text{rg } S = n$ , le système a au moins une solution.
- (iii) Si  $\text{rg } S = p$ , le système a au plus une solution.

**Démonstration**

(ii)  $\text{Im } u = \mathbb{K}^n$  donc  $u$  est surjective.

(iii)  $\dim \text{Ker } u = p - r = 0$  donc  $\mathcal{S}_S = \emptyset$  ou  $\mathcal{S}_S = \{x^{(0)}\}$ . ■

**Remarque 11**

L'algorithme du pivot de Gauss appliqué aux systèmes a été présenté dans un chapitre de début de d'année : appliqué aux lignes de la matrice augmentée pour la rendre échelonnée en lignes (à permutation éventuelle des inconnues près), il permet d'obtenir un système équivalent

$$S \Leftrightarrow \begin{cases} p_1 x_{i_1} + \dots & = b'_1 \\ & p_2 x_{i_2} + \dots & = b'_2 \\ & & \vdots \\ & p_r x_{i_r} + \dots & = b'_r \\ & & 0 & = b'_{r+1} \\ & & \vdots \\ & & 0 & = b'_n \end{cases}$$

où  $r = \text{rg } S$ ,  $i_1 < \dots < i_r$ ,  $p_1, \dots, p_r$  non nuls, les  $n - r$  dernières équations sont les **équations de compatibilité**, elle permettent de savoir si  $\mathcal{S}_S = \emptyset$ .

On tire successivement  $x_{i_r}$ , puis  $x_{i_{r-1}}$  jusqu'à  $x_{i_1}$  en fonction des autres inconnues. On retrouve la dimension  $n - r$ .

**CHANGEMENTS DE BASES, ÉQUIVALENCE, SIMILITUDE****1 Changements de bases****a** Matrices de passage**Définition 7 : Matrice de passage**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie,  $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$  deux bases de  $E$ .

On appelle **matrice de passage de  $\mathcal{B}$  à  $\mathcal{B}'$**  notée  $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ , la matrice  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$  dont les colonnes sont les coordonnées dans  $\mathcal{B}$  des vecteurs de  $\mathcal{B}'$ . Autrement dit :

$$P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') = \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\text{id}_E)$$

**Remarque 12**

$$\text{id}_E \xleftrightarrow[\mathcal{B}, \mathcal{B}']{P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}} \mathcal{B}$$

**Exemple 4**

$\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$  base canonique de  $\mathbb{R}^3$  et  $\mathcal{B}' = (e'_1, e'_2, e'_3)$  tel que

$$\begin{cases} e'_1 & = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \\ e'_2 & = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \\ e'_3 & = \vec{e}_2 - 2\vec{e}_3 \end{cases}$$

$$P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

**Propriété 13 : Inversibilité des matrices de passage**

- (i) Toute matrice de passage est inversible et  $(P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'})^{-1} = P_{\mathcal{B}'}$ .
- (ii) Toute matrice inversible est une matrice de passage.  
Plus précisément si  $E$  est de dimension  $n$ ,  $\mathcal{B}$  une base de  $E$  et  $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ , alors on peut trouver une base  $\mathcal{B}'$  de  $E$  telle que  $A = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$ .

**Démonstration**

- (i)  $\text{id}_E : (E, \mathcal{B}') \rightarrow (E, \mathcal{B})$  est inversible et  $\text{id}_E^{-1} = \text{id}_E : (E, \mathcal{B}) \rightarrow (E, \mathcal{B}')$  donc  $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\text{id}_E)$  est inversible et  $(P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'})^{-1} = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(\text{id}_E^{-1}) = P_{\mathcal{B}'}$ .
- (ii) Si  $A$  inversible et  $u \in \mathcal{L}(E)$  application linéaire représentée par  $A$  dans la base  $\mathcal{B}$  de  $E$  alors  $u$  isomorphisme donc  $u(\mathcal{B})$  base de  $E$  et  $A = P_{\mathcal{B}}^{u(\mathcal{B})}$ . ■



**Méthode : Inversion de matrice**

Pour inverser une matrice carrée  $A$ , on l'interprète comme matrice de passage d'une base  $\mathcal{B}$  à une base  $\mathcal{B}'$  et on exprime les vecteurs de  $\mathcal{B}'$  en fonction de ceux de  $\mathcal{B}$  pour former la matrice de passage d'une base  $\mathcal{B}'$  à une base  $\mathcal{B}$ , c'est-à-dire  $A^{-1}$ .

**Exemple 5**

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$  canoniquement associé,  $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ ,  $\mathcal{B}' = (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3) = u(\mathcal{B})$ .

$$\begin{cases} \vec{e}'_1 &= \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \\ \vec{e}'_2 &= 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \\ \vec{e}'_3 &= 2\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 \end{cases} \iff \dots \iff \begin{cases} \vec{e}_1 &= -\vec{e}'_1 + 2\vec{e}'_2 - \vec{e}'_3 \\ \vec{e}_2 &= 2\vec{e}'_1 - 2\vec{e}'_2 + \vec{e}'_3 \\ \vec{e}_3 &= -\vec{e}'_2 + \vec{e}'_3 \end{cases}$$

Donc  $A$  est inversible et  $A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .

**b Formules de changement de bases**

**Propriété 14 : Changement de base d'un vecteur**

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie,  $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$  deux bases de  $E$ ,  $\vec{x} \in E$ .  
Si  $X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\vec{x})$  et  $X' = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(\vec{x})$ , alors

$$X = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} \times X'$$

$\mathcal{B}$ 
 $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'$ 
 $\mathcal{B}'$

**Démonstration**

Avec  $\text{id}_E : (E, \mathcal{B}') \rightarrow (E, \mathcal{B})$ ,  $\vec{x} = \text{id}_E(\vec{x})$  donc

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\vec{x}) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\text{id}_E(\vec{x})) = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{B}'}(\text{id}_E) \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(\vec{x})$$

donc  $X = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} X'$ . ■



**Propriété 15 : Changement de base pour une application linéaire**

Soient  $E, F$  des  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels de dimension finie,  $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$  deux bases de  $E$ ,  $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$  deux bases de  $F$ ,  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ .

Soient  $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u)$  et  $A' = \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{C}'}(u)$ . Alors

$$A' = P_{\mathcal{C}'}^{\mathcal{C}} \times A \times P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$$

$\mathcal{C}', \mathcal{B}' \quad \mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C} \quad \mathcal{C}, \mathcal{B} \quad \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'$

c'est-à-dire, si  $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$  et  $Q = P_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}'}$ ,

$$A' = Q^{-1}AP \quad \text{ie} \quad A = QA'P^{-1}$$

**Démonstration**

$u: (E, \mathcal{B}') \rightarrow (F, \mathcal{C}')$  peut se représenter par

$$(E, \mathcal{B}') \xrightarrow{\text{id}_E} (E, \mathcal{B}) \xrightarrow{u} (F, \mathcal{C}) \xrightarrow{\text{id}_F} (F, \mathcal{C}')$$

(On écrit simplement  $u = \text{id}_F \circ u \circ \text{id}_E$ .)

D'après les propriétés sur les matrices de composées, on a alors

$$A' = \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{C}'}(u) = \text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{C}'}(\text{id}_F) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{B}}(\text{id}_E)$$

d'où le résultat. ■

**Corollaire 1 : Changement de base pour un endomorphisme**

Soient  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie,  $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$  deux bases de  $E$ ,  $u \in \mathcal{L}(E)$ .

Soient  $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$  et  $A' = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u)$ . Alors

$$A' = P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} \times A \times P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$$

$\mathcal{B}' \quad \mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B} \quad \mathcal{B} \quad \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'$

c'est-à-dire, si  $P = P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'}$

$$A' = P^{-1}AP \quad \text{ie} \quad A = PA'P^{-1}$$

**Exemple 6**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \text{ et}$$

$$\begin{cases} \vec{e}'_1 &= \vec{e}_1 \\ \vec{e}'_2 &= \vec{e}_1 + \vec{e}_2 \\ \vec{e}'_3 &= \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 \end{cases}$$

soit  $\begin{cases} \vec{e}_1 &= \vec{e}'_1 \\ \vec{e}_2 &= -\vec{e}'_1 + \vec{e}'_2 \\ \vec{e}_3 &= -\vec{e}'_2 + \vec{e}'_3 \end{cases}$

Matrice dans la base  $\mathcal{B}'$  de  $u$ , avec la définition puis avec une formule de changement de base.

■ **Première méthode :**

★ D'après la première colonne  $u(\vec{e}'_1) = u(\vec{e}_1) \xrightarrow{\mathcal{B}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$  donc  $u(\vec{e}'_1) = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 = 2\vec{e}'_1 - \vec{e}'_2$ .

★  $u(\vec{e}'_2) \xrightarrow{\mathcal{B}} A \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$  donc  $u(\vec{e}'_2) = 4\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + 2\vec{e}_3 = 5\vec{e}'_1 - 3\vec{e}'_2 + 2\vec{e}'_3$ .

★  $u(\vec{e}'_3) \xrightarrow{\mathcal{B}} A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$  donc  $u(\vec{e}'_3) = 6\vec{e}_1 + 6\vec{e}_3 = 6\vec{e}'_1 - 6\vec{e}'_2 + 6\vec{e}'_3$ .

$$\text{Donc } A' = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ -1 & -3 & -6 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}.$$

■ **Deuxième méthode** :  $P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  et  $P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$A' = P_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} \times A \times P_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 6 \\ -1 & -3 & -6 \\ 0 & 2 & 6 \end{pmatrix}$$

## 2 Matrices équivalentes et rang

### a Relation d'équivalence

#### Définition 8 : Matrices équivalentes

Une matrice  $A$  de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  est dite **équivalente** à une autre matrice  $B$  de  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  si on peut trouver  $U \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$  et  $V \in \mathcal{GL}_p(\mathbb{K})$  telles que

$$A = UBV$$

#### Propriété 16 : Relation d'équivalence

On définit ainsi une relation d'équivalence sur  $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ .

#### Propriété 17 : Caractérisation géométrique

Deux matrices de même format sont équivalentes si et seulement si elles représentent une même application linéaire dans des bases différentes.

#### Démonstration

$\Leftarrow$  : formules de changement de base.

$\Rightarrow$  : Si  $A$  et  $B$  sont équivalentes,  $U, V$  inversibles telles que  $A = UBV$ ,  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  représenté par  $B$  dans des bases  $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ .

On a vu qu'on pouvait interpréter les matrices inversibles  $V$  et  $U^{-1}$  comme matrices de passage de  $\mathcal{B}$  et  $\mathcal{C}$  à des bases  $\mathcal{B}'$  et  $\mathcal{C}'$  de  $E$  et  $F$  respectivement.

Alors, par formule de changement de bases,  $A$  représente  $u$  dans les bases  $\mathcal{B}'$  et  $\mathcal{C}'$ . ■

#### Propriété 18 : Transposée de matrices équivalentes

$A$  et  $B$  sont équivalentes si et seulement si  $A^T$  et  $B^T$  le sont.

### b Lien avec le rang

On rappelle que le rang d'une matrice est celui de l'application linéaire canoniquement associée ou encore celui de la famille de ses vecteurs colonnes.



### Propriété 19 : Matrices équivalentes et rang

Deux matrices équivalentes ont même rang.

#### Démonstration

Si  $A$  est équivalente  $B$ , on a des matrices inversibles  $U, V$  telles que  $A = UB$ . Si  $f, g, u, v$  sont les applications linéaires canoniquement associées à  $A, B, U, V$ , alors  $f = u \circ g \circ v$ . Comme  $u$  et  $v$  sont des isomorphismes,  $\text{rg } f = \text{rg } g$  donc  $\text{rg } A = \text{rg } B$ . ■

### Propriété 20 : Caractérisation du rang d'une application linéaire par la matrice $J_r$

Si une application linéaire  $u \in \mathcal{L}(E, F)$  est de rang  $r$ , alors il existe des bases  $\mathcal{B}$  de  $E$  et  $\mathcal{C}$  de  $F$  dans lesquelles  $u$  est représentée par  $J_r = \begin{pmatrix} I_r & (0) \\ (0) & 0_{n-r, p-r} \end{pmatrix}$ .

#### Démonstration

La forme de la matrice recherchée incite à commencer par déterminer les derniers vecteurs de  $\mathcal{B}$  puis les premiers vecteurs de  $\mathcal{C}$ .

Si  $\text{rg } u = r$  alors, d'après le théorème du rang,  $\dim(\text{Ker } u) = p - r$ . Soit  $(\vec{e}_{r+1}, \dots, \vec{e}_p)$  une base de  $\text{Ker } u$  que l'on complète en une base  $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$  de  $E$ .

Soient pour tout  $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ ,  $\vec{f}_i = u(\vec{e}_i)$ . Comme  $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_r)$  est une base d'un supplémentaire de  $\text{Ker } u$  dans  $E$  et comme  $u$  induit un isomorphisme de tout supplémentaire de  $\text{Ker } u$  sur  $\text{Im } u$  (théorème du rang),  $(\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_r)$  est une famille libre de  $F$  que l'on peut compléter en une base  $\mathcal{C}$ .

On a alors facilement  $\text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u) = J_r$ . ■

### Théorème 1 : Caractérisation du rang d'une matrice par la matrice $J_r$

Une matrice  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(K)$  est de rang  $r$  si et seulement si elle est équivalente à  $J_r$ .

#### Démonstration

La propriété précédente appliquée à l'application linéaire canoniquement associée à  $A$  donne le sens  $\Rightarrow$ . Réciproquement, si  $A$  est équivalente à  $J_r$ ,  $\text{rg } A = \text{rg } J_r = r$ . ■

### Corollaire 2

Deux matrices de même format sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang.

#### Démonstration

Le sens  $\Rightarrow$  a déjà été vu.

Le sens  $\Leftarrow$  est une conséquence du théorème précédent et de la transitivité de l'équivalence. ■

#### Remarque 13

Les classes d'équivalences sont donc les ensembles de matrices de même rang.

**Corollaire 3 : Rang et transposée**

- (i) Si  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ ,  $\text{rg } A = \text{rg}(A^T)$ .
- (ii) Le rang d'une matrice est celui de la famille de ses vecteurs lignes.  
En particulier, une matrice carrée est inversible si et seulement si ses vecteurs lignes forment une famille libre.

**Démonstration**

$A$  est équivalente à  $J_r$ , donc  $A^T$  est équivalente à  $J_r^T = J_r$ , donc  $\text{rg}(A^T) = r = \text{rg } A$ .  
Les lignes de  $A$  sont les colonnes de  $A^T$ . ■

**Remarque 14**

On retrouve le fait que  $\text{rg } A \leq \min(n, p)$ .

**Propriété 21 : Rang d'une matrice et des applications linéaires qu'elle représente**

Le rang d'une matrice est égal au rang de n'importe quelle application linéaire qu'elle représente.

**Démonstration**

Si  $A$  représente  $u$ , alors  $A$  est équivalente à  $J_r$  avec  $r = \text{rg } u$  (autre matrice de  $u$ ), donc  $\text{rg } A = r = \text{rg } u$ . ■

**3 Rang et matrices extraites**

**Définition 9 : Matrice extraite**

Soient  $n, p \in \mathbb{N}^*$  et  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ .  
On appelle **matrice extraite** ou **sous-matrice** de  $A$  toute matrice dont les coefficients sont les  $a_{i,j}$  pour  $(i, j) \in I \times J$  avec  $I \subset \llbracket 1, n \rrbracket$  et  $J \subset \llbracket 1, p \rrbracket$ .  
On notera  $A|_{I \times J}$  cette matrice, obtenue en supprimant des lignes et des colonnes de  $A$ .

**Exemple 7**

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \end{pmatrix}, A|_{\{1;3\} \times \{2;4\}} = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}.$$

**Propriété 22 : Rang d'une sous-matrice**

Soient  $n, p \in \mathbb{N}^*$  et  $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ .  
Pour toute sous-matrice  $R$  de  $A$ ,

$$\text{rg } R \leq \text{rg } A.$$

**Démonstration**

$R = A|_{I \times J}$  avec  $I \subset \llbracket 1, n \rrbracket$  et  $J \subset \llbracket 1, p \rrbracket$ .  
Les colonnes de  $A|_{\llbracket 1, n \rrbracket \times J}$  étant des colonnes de  $A$ , on a  $\text{rg } A|_{\llbracket 1, n \rrbracket \times J} \leq \text{rg } A$ .  
Les lignes de  $R = A|_{I \times J}$  étant des lignes de  $A|_{\llbracket 1, n \rrbracket \times J}$ , on a  $\text{rg } R \leq \text{rg } A|_{\llbracket 1, n \rrbracket \times J} \leq \text{rg } A$ . ■



### Propriété 23 : Caractérisation du rang par les matrices extraites

*Le rang d'une matrice est l'ordre maximum de ses matrices extraites (carrées) inversibles.*

#### Démonstration

Si  $A = 0$ , elle n'a pas de matrice extraite inversible et est bien de rang 0.

Sinon, soit  $r$  l'ordre maximum de ses matrices extraites (carrées) inversibles.

D'après la propriété précédente,  $r \leq \text{rg } A$ .

Il suffit d'extraire de  $A$  une matrice inversible de taille  $\text{rg } A$ .

Comme le rang de la famille des colonnes de  $A$  est égal à  $\text{rg } A$ , on peut trouver une partie  $J$  de  $\llbracket 1, p \rrbracket$  de taille  $\text{rg } A$  telle que les colonnes  $C_j$  pour  $j \in J$  de  $A$  forment une famille libre (de rang sa taille  $\text{rg } A$ ).

Comme le rang de la famille des lignes de  $A|_{\llbracket 1, n \rrbracket \times J}$  est égal au rang de ses colonnes soit  $\text{rg } A$ , on peut trouver une partie  $I$  de  $\llbracket 1, n \rrbracket$  de taille  $\text{rg } A$  telle que les lignes  $L_i$  pour  $i \in I$  de  $A|_{\llbracket 1, n \rrbracket \times J}$  forment une famille libre (de rang sa taille  $\text{rg } A$ ).

Finalement,  $A|_{I \times J}$  est une matrice de taille  $\text{rg } A$  égal à son rang donc inversible. ■

#### Exemple 8

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$  est de rang 3.

## 4 Opérations élémentaires

Les opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes d'une matrice sont les transpositions (échanges), transvection, dilatations). On a vu dans un chapitre précédent qu'elles revenaient à multiplier respectivement à gauche ou à droite par une matrice inversible (à savoir retrouver), dont la taille est égale au nombre de lignes respectivement colonnes correspondantes.

### Propriété 24

- (i) Une opération élémentaire sur ses lignes ne change pas le noyau d'une matrice.
- (ii) Une opération élémentaire sur ses colonnes ne change pas l'image d'une matrice.
- (iii) Une opération élémentaire ne change pas le rang d'une matrice.

#### Démonstration

(i) Si  $P$  inversible,  $AX = 0 \iff (PA)X = 0$ .

(ii) Si  $P$  inversible,  $AX = (AP)(P^{-1}X)$  et  $(AP)X = A(PX)$ .

(iii) Une opération élémentaire donne une matrice équivalente. ■

### Définition 10 : Matrices échelonnées

Une matrice  $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$  est dite **echelonnée** en lignes (respectivement en colonnes) si chaque ligne (respectivement colonne) débute par un nombre strictement croissant de 0 jusqu'à ce qu'elles soient éventuellement nulles.

#### Remarques 4

- R1 – Si elle est carrée, elle est nécessairement triangulaire supérieure (resp. inférieure).
- R2 – Si une ligne (resp. colonne) est nulle, les suivantes le sont aussi.

**Exemples 4**

E1 -  $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 & -5 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  est échelonnée en lignes. 2, 3, -4, 6 sont appelés **pivots**.

E2 -  $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & -5 & 0 & 0 \end{pmatrix}$  est échelonnée en colonnes. -1, -1 sont les pivots.

E3 -  $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$  n'est pas échelonnée en lignes (même si elle est triangulaire).

**Propriété 25**

*Toute matrice peut être transformée en une matrice échelonnée en lignes (resp. colonnes) par des opérations élémentaires sur les lignes (resp. colonnes.)*

**Démonstration**

On applique l'algorithme du pivot de Gauss aux lignes (resp. colonnes) de la matrice :

1. Si la matrice est nulle, elle est échelonnée.
2. Sinon, soit  $j_0$  le numéro de la première colonne non nulle au moins un de ses coefficients n'est pas nul, disons  $a_{i_0, j_0} = p \neq 0$ , ce sera un pivot : le mettre dans la première ligne grâce à  $L_1 \leftrightarrow L_{i_0}$ .
3. On annule ensuite tous les coefficients de la première colonne avec les opérations  $L_i \leftarrow L_i - \frac{a_{i,1}}{p} L_1$ . On obtient une matrice de la forme :

$$\left( \begin{array}{cccc|ccc} 0 & \dots & 0 & \boxed{p} & * & \dots & * \\ \vdots & & \vdots & 0 & & & \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & & A' \\ 0 & \dots & 0 & 0 & & & \end{array} \right)$$

4. On recommence alors à l'étape 1 avec  $A'$ , ce qui revient à agir sur les  $n-1$  dernière lignes. Les opérations sur ces lignes ne changent pas la première. ■

**Exemple 9**

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & -3 & 1 & 3 \\ 1 & 3 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 4 & 3 & 3 & 1 \end{pmatrix}$  en colonnes.

On ne change pas le rang par opérations élémentaires. Quelle est le rang d'une matrice échelonnée ?

**Propriété 26 : Rang d'une matrice échelonnée**

*Le rang d'une matrice échelonnée en lignes (resp. colonnes) est le nombre de lignes (resp. colonnes) non nulles.*

**Démonstration**

Sur les colonnes, si  $C_{r+1}, \dots, C_p$  sont les colonnes nulles, alors  $C_1, \dots, C_r$  sont facilement libres grâce aux pivots et le rang vaut  $r$ . ■

**Remarque 15**

En faisant des opérations sur les colonnes, on peut obtenir à la fois le rang, l'image et le noyau !



**Exemple 10**

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 1 \\ 5 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{rg } A \stackrel{C_1 \leftrightarrow C_3}{=} \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 6 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \stackrel{\substack{C_2^{(2)} \leftarrow C_2^{(1)} - 2C_1^{(1)} \\ C_3^{(2)} \leftarrow C_3^{(1)} - 4C_1^{(1)}}}{=} \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \stackrel{C_3^{(3)} \leftarrow C_3^{(2)} - C_2^{(2)}}{=} \text{rg} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Donc  $\text{rg } A = 2$ ,  $\text{Im } A = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ ,  $\dim \text{Ker } A = 1$ . Et

$$C_3^{(3)} = 0 = C_3^{(2)} - C_2^{(2)} = (C_3^{(1)} - 4C_1^{(1)}) - (C_2^{(1)} - 2C_1^{(1)}) = C_3^{(1)} - C_2^{(1)} - 2C_1^{(1)} = C_1 - C_2 - 2C_3.$$

Donc  $A \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $\text{Ker } A = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right)$ .

**Remarque 16**

En appliquant ensuite un pivot de Gauss sur les lignes, on peut se ramener à  $J_r$ .

# IV MATRICES SEMBLABLES

## 1 Définition

**Définition 11 : Matrices semblables**

Soient  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .  $A$  est dite **semblable** à  $B$  lorsqu'on l'on a  $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$  tel que  $A = PBP^{-1}$ .

## 2 Propriétés

**Propriété 27 : Relation d'équivalence**

La relation de similitude est une relation d'équivalence dont les classes sont appelées **classes de similitudes**.

**Démonstration**

- $A = I_n A I_n^{-1}$ .
- Si  $A = PBP^{-1}$ , alors  $B = P^{-1}AP = P^{-1}A(P^{-1})^{-1}$ .
- Si  $A = PBP^{-1}$  et  $B = QCQ^{-1}$ , alors  $A = (PQ)C(PQ)^{-1}$ .

**Remarque 17**

Des matrices semblables sont équivalentes, mais la réciproque est fausse.

**Propriété 28 : Caractérisation géométrique**

$A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  sont semblables si et seulement si elles représentent un même endomorphisme (dans des bases différentes.)

**Remarque 18**

Cette caractérisation permet de démontrer la relation d'équivalence encore plus facilement! Les classes d'équivalences sont les ensembles de toutes les matrices représentant un même endomorphisme.

**Démonstration**

Si  $A$  et  $B$  représentent un même endomorphisme, elles sont semblables par formule de changement de base. Réciproquement, si  $A = PBP^{-1}$ ,  $E$  un  $\mathbb{K}$ -ev de dimension finie  $n$ ,  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ . Alors on a une base  $\mathcal{B}'$  tel que la matrice inversible  $P = P_{\mathcal{B}\mathcal{B}'}$ . Si  $u \in \mathcal{L}(E)$  est représenté par  $B$  dans  $\mathcal{B}'$ , alors  $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$  par formule de changement de base. ■

**Propriété 29 : Puissances et matrices semblables**

Soient  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$  telles que  $A = PBP^{-1}$ .

(i)  $\forall k \in \mathbb{N}, A^k = PB^kP^{-1}$

(ii)  $A$  inversible ssi  $B$  l'est, et si c'est le cas, la formule précédente est valable dans  $\mathbb{Z}$ .

**Démonstration**

$A$  inversible ssi  $B$  l'est car  $A$  et  $B$  ont même rang.

■ **Première méthode** : si  $u$  est canoniquement associé à  $A$ , alors il existe une base  $\mathcal{B}$  dans laquelle  $u$  est représenté par  $B$ . Alors  $u^k$  est représenté par  $A^k$  dans la base canonique et par  $B$  dans la base  $\mathcal{B}$ . Donc par formule de changement de base,  $A^k = PB^kP^{-1}$ . Valable pour  $k < 0$  si  $A$  ou  $B$  inversible.

■ **Récurrence** : vrai pour  $k = 0$ , si c'est vrai pour un  $k \geq 0$ ,

$$A^{k+1} = PA^kP^{-1}PAP^{-1} = PA^{k+1}P^{-1}.$$

■ **Troisième méthode** : si  $k \geq 0$ ,

$$A^k = (PBP^{-1})^k = PB(P^{-1}P)B \dots (P^{-1}P)BP^{-1} = PB^kP^{-1}.$$

Puis si  $A$  et  $B$  inversible,  $A^{-1} = (PBP^{-1})^{-1} = PB^{-1}P^{-1}$  appliqué à  $A^k$  et  $B^k$  donne le résultat dans  $\mathbb{Z}$ . ■

**Propriété 30 : La trace est un invariant de similitude**

Si  $A$  et  $B$  sont semblables alors  $\text{tr } A = \text{tr } B$ . La réciproque est fausse.

**Démonstration**

$$\text{tr } A = \text{tr}(PBP^{-1}) = \text{tr}(P^{-1}PB) = \text{tr } B. \quad \blacksquare$$



**Méthode : Vérifier si des matrices sont semblables**

Pour montrer que deux matrices ne sont pas semblables, on trouve un invariant de similitude qui est différent pour les deux (trace, rang... on en verra d'autres plus tard).

Pour montrer que deux matrices sont semblables, on peut considérer un endomorphisme représenté par la première et construire une base dans laquelle il est représenté par la deuxième.

**Exemples 5**

E1 –  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 12 & 5 & -6 \\ -8 & 3 & 0 \\ 17 & -25 & 6 \end{pmatrix}$  ne sont pas semblables.

E2 –  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 8 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix}$  ont même trace mais ne sont pas semblables (elles n'ont pas même rang).



### 3 Trace d'un endomorphisme

#### Définition 12 : Trace d'un endomorphisme

Soit  $E$   $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie,  $u \in \mathcal{L}(E)$ . On appelle **trace** de  $u$ , notée  $\text{tr } u$ , la trace de n'importe quelle matrice le représentant.

#### Remarque 19

Définition licite vu la propriété précédente.

#### Propriété 31 : de la trace d'un endomorphisme

$\text{tr}$  est une forme linéaire sur  $\mathcal{L}(E)$  et si  $u, v \in \mathcal{L}(E)$ ,  $\text{tr}(u \circ v) = \text{tr}(v \circ u)$ .

#### Démonstration

Si  $A$  et  $B$  représentent  $u$  et  $v$  dans une même base,  $AB$  et  $BA$  représentent  $u \circ v$  et  $v \circ u$ . ■

#### Propriété 32 : Trace d'un projecteur

La trace d'un projecteur est égale à son rang.

#### Démonstration

Il y a une base dans laquelle la matrice du projecteur est  $J_r$ . ■

#### Remarque 20

Attention : toute matrice est équivalente à  $J_r$  où  $r$  est son rang, mais une matrice carrée n'est pas **semblable** à  $J_r$  en général. C'est en fait le cas si et seulement si l'agit d'un projecteur.

### 4 Diagonalisation (spé)

**Position du problème** : on a vu que les opérations sur les matrices se transmettent bien par la relation de similitude. Comme il est très facile de travailler avec des matrices diagonales, on essaye souvent de rendre une matrice semblable à une matrice diagonale.

Du point de vue des endomorphismes, cela revient à trouver une base dans laquelle la matrice est diagonale :

$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$ . C'est une base dont les vecteurs vérifient  $u(\vec{e}_i) = \lambda_i \vec{e}_i$ .

#### Définition 13 : Endomorphisme, matrice diagonalisable

$u \in \mathcal{L}(E)$  est dit **diagonalisable** si et seulement si il existe une base dans laquelle sa matrice est diagonale.

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  est dite **diagonalisable** si et seulement si elle est semblable à une matrice diagonale :  $A = PDP^{-1}$  avec  $P$  inversible et  $D$  diagonale.

#### Remarque 21

Une matrice est diagonalisable si et seulement si l'application linéaire canoniquement associée est diagonalisable.

**Définition 14 : Éléments propres**

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  (respectivement  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ).

On appelle **valeur propre** de  $u$  (resp.  $A$ ) tout  $\lambda \in \mathbb{K}$  tel qu'il existe  $\vec{x} \in E$  (resp.  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ ) **non nul** tel que  $u(\vec{x}) = \lambda \vec{x}$  (resp.  $AX = \lambda X$ ).

Un tel vecteur **non nul** est appelé **vecteur propre** associé à la valeur propre  $\lambda$ .

On appelle **sous-espace propre** associé à la valeur propre  $\lambda$  le sous-espace  $E_\lambda(u) = \text{Ker}(u - \lambda \text{id}_E) = \{ \vec{x} \in E \mid u(\vec{x}) = \lambda \vec{x} \}$  (resp.  $E_\lambda(A) = \text{Ker}(A - \lambda I_n) = \{ X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mid AX = \lambda X \}$ ).

L'ensemble des valeurs propres de  $u$  (resp.  $A$ ) est appelé son **spectre**, noté  $\text{Sp}u$  (resp.  $\text{Sp}A$ ).

**Remarques 5**

- R1 – Les valeurs propres, vecteurs propres, sous-espaces propres d'une matrices correspondent à ceux de l'application linéaire canoniquement associée.
- R2 –  $\lambda$  est valeur propre de  $u$  si et seulement si  $u - \lambda \text{id}_E$  n'est pas injectif.
- R3 – Chercher les valeurs propres de  $A$  revient à trouver  $\lambda$  tel que  $A - \lambda I_n$  n'est pas inversible.
- R4 – 0 est valeur propre de  $A$  si et seulement si  $A$  n'est pas inversible.



**Méthode : Diagonaliser une matrice**

Pour diagonaliser une matrice (ou un endomorphisme), il faut former une base de vecteurs propres. Une base diagonalisante est alors obtenue en mettant bout à bout des bases des sous-espaces propres.

Alors  $A = PDP^{-1}$  avec  $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}$  où  $\lambda_1, \dots, \lambda_p$  sont les valeurs propres de  $A$  et où  $P$  est la matrice de passage de la base canonique à la base de vecteurs propres placés dans le même ordre que les valeurs propres.

**Exemple 11**

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ avec } -1 \text{ et } 2 \text{ comme valeurs propres. } A - \lambda I_3 = \begin{pmatrix} -\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & -\lambda \\ 0 & -(\lambda+1) & \lambda+1 \\ 0 & 0 & 2+\lambda-\lambda^2 \end{pmatrix} \text{ par pivot de}$$

Gauss.

$A - \lambda I_3$  n'est pas inversible si et seulement si  $\lambda + 1 = 0$  ou  $2 + \lambda - \lambda^2 = 0$ .  
Donc  $\text{Sp}(A) = \{-1, 2\}$ .

**Remarque 22**

Comme  $0 \notin \text{Sp}(A)$ ,  $A$  est inversible.

Si  $\lambda = -1$ ,  $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff x + y + z = 0 : E_{-1}(A) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ .

Si  $\lambda = 2$ ,  $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \iff x = y = z : E_2(A) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ .

Autres calculs possibles :

- $A + I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$  de rang 1 avec  $C_1 - C_2 = C_1 - C_3 = 0$ . Donc, par théorème du rang  $\dim E_{-1}(A) = 2$  et  $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$  en sont deux vecteurs non colinéaires donc  $E_{-1}(A) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$ .
- $A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$  de rang 2 avec  $C_1 + C_2 + C_3 = 0$  et  $(C_1, C_2)$  libre. Donc, par théorème du rang  $\dim E_2(A) = 1$  et  $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  en est un vecteur non nul donc  $E_2(A) = \text{Vect} \left( \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$ .

On a assez de vecteurs pour former une base :  $A$  est diagonalisable,  $A = PDP^{-1}$  avec  $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ ,  $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ .

On calcule  $P^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ .



On en déduit que pour tout  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $A^n = P \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} P^{-1}$  ce qui permet de retrouver le résultat du TD :

$$A^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2^n + 2(-1)^n & 2 + (-1)^{n+1} & 2 + (-1)^{n+1} \\ 2 + (-1)^{n+1} & 2^n + 2(-1)^n & 2 + (-1)^{n+1} \\ 2 + (-1)^{n+1} & 2 + (-1)^{n+1} & 2^n + 2(-1)^n \end{pmatrix}.$$

■ **Application 1** : Trouver le terme général des suites  $x, y, z$  telles que pour tout  $n$ ,

$$\begin{cases} x_{n+1} = y_n + z_n \\ y_{n+1} = x_n + z_n \\ z_{n+1} = x_n + y_n \end{cases}$$

On pose  $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$ , alors  $X_{n+1} = AX_n$  donc pour tout  $n$ ,  $X_n = A^n X_0$ .

On peut même calculer le résultat sans calculer  $P^{-1}$  ! Si on pose  $Y_n = P^{-1}X_n$ ,  $Y_{n+1} = DY_n$  donc  $Y_n = D^n Y_0$  et donc  $X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix}$ .

■ **Application 2** : Résoudre le système différentiel,

$$(S) \begin{cases} f' = g + h \\ g' = f + h \\ h' = f + g \end{cases}$$

On pose  $X(t) = \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \\ h(t) \end{pmatrix}$  (fonction de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}^3$ ), alors  $X' = AX$  donc si  $Y = P^{-1}X$ ,  $(S) \iff Y' = DY$ , donc si

$$Y(t) = \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ y_3(t) \end{pmatrix},$$

$$(S) \iff \begin{cases} y_1' = -y_1 \\ y_2' = -y_2 \\ y_3' = 2y_3 \end{cases}$$

donc

$$(S) \iff \exists \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} y_1(t) = \lambda e^{-t} \\ y_2(t) = \mu e^{-t} \\ y_3(t) = \nu e^{2t} \end{cases}$$

Puis  $X = PY$  (pas besoin de  $P^{-1}$  ici!)

$$(S) \iff \exists \lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}, \forall t \in \mathbb{R}, \begin{pmatrix} f(t) \\ g(t) \\ h(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda e^{-t} \\ \mu e^{-t} \\ \nu e^{2t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\lambda + \mu)e^{-t} + \nu e^{2t} \\ -\lambda e^{-t} + \nu e^{2t} \\ -\mu e^{-t} + \nu e^{2t} \end{pmatrix}.$$