Programme de colle – MP2I

1. Dimension finie

Extrait du programme officiel :

Contenus	Capacités & commentaires
a) Existence de bases	
Un espace vectoriel est dit de dimension finie s'il possède une famille génératrice finie.	
Si $(x_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ engendre E et si $(x_i)_{i\in I}$ est libre pour une certaine partie I de $\{1,\dots,n\}$, alors il existe une partie J de $\{1,\dots,n\}$ contenant I pour laquelle $(x_j)_{j\in J}$ est une base de E.	Existence de bases en dimension finie. Théorèmes de la base extraite (de toute famille génératrice on peut extraire une base), de la base incomplète (toute famille libre peut être complétée en une base).
b) Dimension d'un espace de dimension finie	
Dans un espace engendré par n vecteurs, toute famille de $n+1$ vecteurs est liée.	
Dimension d'un espace de dimension finie.	Dimension de $\mathbb{K}^n$, de $\mathbb{K}_n[X]$, de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Dimension de l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1, de l'espace des solutions d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants, de l'espace des suites vérifiant une relation de récurrence linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants.
Dans un espace de dimension n, caractérisation des bases comme familles libres ou génératrices de n vecteurs.	
Dimension d'un produit fini d'espaces vectoriels de dimension finie.	
Rang d'une famille finie de vecteurs.	Notation $\mathrm{rg}(x_1,\dots,x_n)$.
c) Sous-espaces et dimension	
Dimension d'un sous-espace d'un espace de dimension finie, cas d'égalité.	
Dimension d'une somme de deux sous-espaces : formule de Grassmann.	
Tout sous-espace d'un espace de dimension finie possède un supplémentaire. Caractérisation dimensionnelle des couples de sous-espaces supplémentaires.	
Base adaptée à un sous-espace, à une décomposition en somme directe de deux sous-espaces.	

Pas d'application linéaire pour le moment.

2. Calcul matriciel

Extrait du programme officiel :

Contenus	Capacités & commentaires
a) Opérations sur les matrices	
Ensemble $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ des matrices à n lignes et p colonnes à coefficients dans le corps $\mathbb{K}$. Addition, multiplication par un scalaire, combinaisons linéaires.	
Matrices élémentaires.	Toute matrice de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est combinaison linéaire de matrices élémentaires.
Produit matriciel ; bilinéarité, associativité.	Si X est une matrice colonne, AX est une combinaison linéaire des colonnes de A.
Produit d'une matrice élémentaire de $\mathscr{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par une matrice élémentaire de $\mathscr{M}_{p,q}(\mathbb{K})$.	Symbole de Kronecker $\delta_{i,j}$.
Transposée d'une matrice.	Notation $A^\top$.
Opérations sur les transposées : combinaison linéaire, produit.	
b) Opérations élémentaires	
Interprétation des opérations élémentaires sur les lignes et sur les colonnes en termes de produit matriciel.	
c) Systèmes linéaires	
Écriture matricielle $AX=B$ d'un système linéaire. Système homogène associé.	
Système compatible.	Le système $AX=B$ est compatible si B est combinaison linéaire des colonnes de A.

Contenus	Capacités & Commentaires
Les solutions du système compatible $AX=B$ sont les X_0+Y, où X_0 est une solution particulière et où Y parcourt l'ensemble des solutions du système homogène associé.	On reprend brièvement l'algorithme du pivot, en termes d'opérations élémentaires sur les lignes, dans ce contexte général. Toute technicité est exclue.
e) Anneau des matrices carrées	
Anneau $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.	Non commutativité si $n \geqslant 2$. Exemples de diviseurs de zéro, d'éléments nilpotents.
Matrice identité, matrice scalaire.	Notation I_n.
Matrices symétriques, antisymétriques.	Notations $\mathscr{S}_n(\mathbb{K})$, $\mathscr{A}_n(\mathbb{K})$.
Formule du binôme.	Application au calcul de puissances.
Produit de matrices diagonales, de matrices triangulaires supérieures, inférieures.	
Matrice inversible, inverse. Groupe linéaire.	Notation $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.
Inverse d'une transposée.	
Les opérations élémentaires préservent l'inversibilité.	
Calcul de l'inverse d'une matrice, par opérations élémentaires ou par résolution du système $AX=Y$.	Toute technicité est exclue.
Condition nécessaire et suffisante d'inversibilité d'une matrice triangulaire ; l'inverse d'une matrice triangulaire inversible est triangulaire.	Cas particulier des matrices diagonales.

La trace et le produit par blocs ont été introduits.

Remarque : non, il n'y a pas de d) dans le programme officiel...

Questions de cours

Les questions de cours précédées d'une ★ ne sont pas exigibles cette semaine du groupe 4 ayant colle d'informatique.

(i) ★ Théorèmes de Rolle et des accroissements finis.

(ii) ★ Sous-groupes de $(\mathbb{Z},+)$.

(iii) Théorèmes de la base extraite et de la base incomplète.

(iv) Dimension des sous-espaces, cas d'égalité.

(v) Formule de Grassmann.

(vi) Propriétés du produit matriciel (par le calcul) : bilinéarité, associativité, produit de deux matrices élémentaires.

(vii) ★ Propriétés de la transposition et de la trace.

(viii) ★ Supplémentarité des matrices symétriques et antisymétriques (2 méthodes).

(ix) **CCINP 25 : Suite vérifiant une relation de récurrence linéaire** [1]
Soit a un nombre complexe. On note E l'ensemble des suites à valeurs complexes telles que :

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\ u_{n+2}=2a\,u_{n+1}+4(\mathrm{i}a-1)u_n \text{ avec } (u_0,u_1)\in\mathbb{C}^2.$$

1. (a) Prouver que E est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites à valeurs complexes.
   (b) Déterminer, en le justifiant, la dimension de E.
2. Dans cette question, on considère la suite de E définie par : $u_0=1$ et $u_1=1$.
   Exprimer, pour tout entier naturel n, le nombre complexe u_n en fonction de n.
   Indication : discuter suivant les valeurs de a.

1. C'est un peu long. On pourra proposer de ne détailler certains calculs que sur demande.