

Programme de colle – MP2I

Probabilités

Extrait du programme officiel :

Contenus	Capacités & commentaires
a) Univers, événements, variables aléatoires	
Lien entre vocabulaire ensembliste et vocabulaire des probabilités.	On se limite au cas d'un univers fini. Événement élémentaire (singleton), système complet d'événements, événements disjoints (ou incompatibles). Notations $\{X \in A\}$ et $\{X \in A\}$.
Une variable aléatoire X est une application définie sur l'univers Ω à valeurs dans un ensemble E .	
b) Espaces probabilisés finis	
Probabilité sur un univers fini.	Espace probabilisé fini (Ω, P) . Notations $P(X \in A)$, $P(X = x)$ et $P(X \leq x)$. Une probabilité P sur Ω est déterminée par la distribution de probabilités $(P(\{\omega\}))_{\omega \in \Omega}$.
Une distribution de probabilités sur un ensemble E est une famille d'éléments de \mathbb{R}^+ indexée par E et de somme 1. Une distribution de probabilités sur un ensemble fini est une famille de réels positifs indexée par cet ensemble et de somme 1. Probabilité uniforme.	
Probabilité de la réunion ou de la différence de deux événements, de l'événement contraire. Croissance.	La formule du crible est hors programme.
c) Probabilités conditionnelles	
Si $P(B) > 0$, la probabilité conditionnelle de A sachant B est définie par la relation $P(A B) = P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.	
L'application P_B est une probabilité. Formules des probabilités composées, des probabilités totales, de Bayes.	Par convention, $P(A B)P(B) = 0$ lorsque $P(B) = 0$.
d) Loi d'une variable aléatoire (à partir de jeudi)	
Loi P_X d'une variable aléatoire X à valeurs dans E .	La probabilité P_X est déterminée par la distribution de probabilités $(P(X = x))_{x \in E}$. On note $X \sim Y$ la relation $P_X = P_Y$. Si $X \sim Y$ alors $f(X) \sim f(Y)$. Notation $X \sim \mathcal{U}(E)$. Notation $X \sim \mathcal{B}(p)$. Interprétation comme succès d'une expérience. Notation $X \sim \mathcal{B}(n, p)$.
Variable aléatoire $f(X)$.	
Variable uniforme sur un ensemble fini non vide E .	
Variable de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$.	
Variable binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0, 1]$.	

⚠ Pas de couples de variables aléatoires ni d'indépendance cette semaine.

⚠ Pas de loi de variable aléatoires pour les colles avant jeudi.

Semaine prochaine : Probabilités (fin), applications linéaires.

Questions de cours

Les questions de cours précédées d'une ★ ne sont pas exigibles cette semaine du groupe 1 ayant colle d'informatique.

- (i) ★ Racines n^{e} de l'unité.
- (ii) Théorème des accroissements finis.
- (iii) Probabilité de la réunion ou de la différence de deux événements, de l'événement contraire. Croissance.
- (iv) Une probabilité \mathbb{P} sur Ω est déterminée par la distribution de probabilités $(\mathbb{P}(\{\omega\}))_{\omega \in \Omega}$.
- (v) Formules des probabilités composées, des probabilités totales, de Bayes.
- (vi) ★ (À partir de jeudi) description des lois au programme.
- (vii) **CCINP 105**
 1. Énoncer et démontrer la formule de Bayes pour un système complet d'événements.
 2. On dispose de 100 dés dont 25 sont pipés. Pour chaque dé pipé, la probabilité d'obtenir le chiffre 6 lors d'un lancer vaut $\frac{1}{2}$.
 - a) On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé et on obtient le chiffre 6. Quelle est la probabilité que ce dé soit pipé ?
 - b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On tire un dé au hasard parmi les 100 dés. On lance ce dé n fois et on obtient n fois le chiffre 6. Quelle est la probabilité p_n que ce dé soit pipé ?
 - c) Déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$. Interpréter ce résultat.
- (viii) ★ **CCINP 107**

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 . L'urne U_1 contient deux boules blanches et trois boules noires. L'urne U_2 contient quatre boules blanches et trois boules noires. On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes : on choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie. On note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient.

 - Si la boule tirée était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne U_1 .
 - Sinon le tirage suivant se fait dans l'urne U_2 .

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement « la boule tirée au $n^{\text{ième}}$ tirage est blanche » et on pose $p_n = \mathbb{P}(B_n)$.

 1. Calculer p_1 .
 2. Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} = -\frac{6}{35}p_n + \frac{4}{7}$.
 3. En déduire, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de p_n .