Programme de colle – MP2I

Probabilités

Reprise du programme précédent auquel s'ajoute :
Extrait du programme officiel :

Contenus	Capacités & commentaires
d) Loi d'une variable aléatoire	
Loi P_X d'une variable aléatoire X à valeurs dans E.	La probabilité P_X est déterminée par la distribution de probabilités $(P(X=x))_{x\in E}$. On note $X \sim Y$ la relation $P_X = P_Y$.
Variable aléatoire $f(X)$.	Si $X \sim Y$ alors $f(X) \sim f(Y)$.
Variable uniforme sur un ensemble fini non vide E.	Notation $X \sim \mathscr{U}(E)$.
Variable de Bernoulli de paramètre $p \in [0,1]$.	Notation $X \sim \mathscr{B}(p)$. Interprétation comme succès d'une expérience.
Variable binomiale de paramètres $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in [0,1]$.	Notation $X \sim \mathscr{B}(n,p)$.
Loi conditionnelle d'une variable aléatoire X sachant un événement A.	
Couple de variables aléatoires. Loi conjointe, lois marginales.	Un couple de variables aléatoires est une variable aléatoire à valeurs dans un produit. Notation $P(X=x, Y=y)$. Extension aux n-uplets de variables aléatoires.
e) Événements indépendants	
Les événements A et B sont indépendants si $P(A\cap B) = P(A)P(B)$.	Si $P(B) > 0$, l'indépendance de A et B s'écrit $P(A\|B) = P(A)$.
Famille finie d'événements indépendants.	L'indépendance deux à deux n'implique pas l'indépendance.
Si A et B sont indépendants, A et $\overline{B}$ le sont aussi.	Extension au cas de n événements.
f) Variables aléatoires indépendantes	
Les variables aléatoires X et Y définies sur l'univers Ω sont indépendantes si pour tout $A \in \mathscr{P}(X(\Omega))$ et tout $B \in \mathscr{P}(Y(\Omega))$, les événements $(X \in A)$ et $(Y \in B)$ sont indépendants.	Notation $X \perp Y$. Cette condition équivaut au fait que la distribution de probabilités de (X,Y) est donnée par $P\big((X,Y)=(x,y)\big) = P(X=x)P(Y=y)$.
Extension aux n-uplets de variables aléatoires.	Modélisation de n expériences aléatoires indépendantes par une suite finie $(X_i)_{1\leqslant i\leqslant n}$ de variables aléatoires indépendantes.
Si $X_1,\dots,X_n$ sont indépendantes de loi $\mathscr{B}(p)$, alors $X_1+\cdots+X_n$ suit la loi $\mathscr{B}(n,p)$.	Interprétation : nombre de succès lors de la répétition de n expériences indépendantes ayant chacune la probabilité p de succès.
Si les variables aléatoires X et Y sont indépendantes, alors $f(X)$ et $g(Y)$ sont indépendantes.	
Lemme des coalitions : si les variables aléatoires $X_1,\dots,X_n$ sont indépendantes, alors $f(X_1,\dots,X_m)$ et $g(X_{m+1},\dots,X_n)$ le sont aussi.	Extension au cas de plus de deux coalitions.

⚠ **Pas d'espérance ni de variance pour le moment.**

Semaine prochaine : Applications linéaires.

Questions de cours

Les questions de cours précédées d'une ★ ne sont pas exigibles cette semaine du groupe 1 ayant colle d'informatique.

(i) Formules des probabilités composées, des probabilités totales, de Bayes.

(ii) Définition de la loi $\mathbb{P}_X$ d'une variable aléatoire X. Description des lois usuelles. Loi de $f(X)$.

(iii) Si $A_1, \dots, A_n$ sont indépendants, en changeant l'un des événements en son contraire, on obtient une famille d'événements indépendants.

(iv) **CCINP 95** : Une urne contient deux boules blanches et huit boules noires.

1. Un joueur tire successivement, avec remise, cinq boules dans cette urne.
   Pour chaque boule blanche tirée, il gagne 2 points et pour chaque boule noire tirée, il perd 3 points.
   On note X la variable aléatoire représentant le nombre de boules blanches tirées.
   On note Y le nombre de points obtenus par le joueur sur une partie.
   (a) Déterminer la loi de X.
   (b) Déterminer la loi de Y.
2. Dans cette question, on suppose que les cinq tirages successifs se font sans remise.
   b) Déterminer la loi de X.
   b) Déterminer la loi de Y.

(v) ★ **CCINP 98** : Une secrétaire effectue, une première fois, un appel téléphonique vers n correspondants distincts.
On admet que les n appels constituent n expériences indépendantes et que pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est p $(p \in]0,1[)$.
Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de correspondants obtenus.

1. Donner la loi de X. Justifier.
2. La secrétaire rappelle une seconde fois, dans les mêmes conditions, chacun des $n-X$ correspondants qu'elle n'a pas pu joindre au cours de la première série d'appels. On note Y la variable aléatoire représentant le nombre de personnes jointes au cours de la seconde série d'appels.
   (a) Soit $i \in [\![0,n]\!]$. Déterminer, pour $k \in \mathbb{N}$, $P(Y=k|X=i)$.
   (b) Prouver que $Z = X+Y$ suit une loi binomiale dont on déterminera le paramètre.
   Indication : on pourra utiliser, sans la prouver, l'égalité suivante : $\binom{n-i}{k-i}\binom{n}{i} = \binom{k}{i}\binom{n}{k}$.

(vi) **CCINP 109** : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules blanches numérotées de 1 à n et deux boules noires numérotées 1 et 2.
On effectue le tirage une à une, sans remise, de toutes les boules de l'urne.
On note X la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule blanche.
On note Y la variable aléatoire égale au rang d'apparition de la première boule numérotée 1.

1. Déterminer la loi de X.
2. Déterminer la loi de Y.

(vii) **CCINP 101** : Dans une zone désertique, un animal erre entre trois points d'eau A,B et C.
A l'instant t=0, il se trouve au point A.
Quand il a épuisé l'eau du point où il se trouve, il part avec équiprobabilité rejoindre l'un des deux autres points d'eau.
L'eau du point qu'il vient de quitter se régénère alors.
Soit $n \in \mathbb{N}$.

On note A_n l'événement" l'animal est en A après son $n^{\text{ième}}$ trajet".
On note B_n l'événement" l'animal est en B après son $n^{\text{ième}}$ trajet".
On note C_n l'événement" l'animal est en C après son $n^{\text{ième}}$ trajet".
On pose $P(A_n) = a_n$, $P(B_n) = b_n$ et $P(C_n) = c_n$.

1. (a) Exprimer, en le justifiant, a_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.
   (b) Exprimer, de même, b_{n+1} et c_{n+1} en fonction de a_n, b_n et c_n.

   On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 0 \end{pmatrix}$. On admet qu'il existe une matrice P inversible telle que $P^{-1}AP = D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & -1/2 \end{pmatrix}$.
2. Montrer comment les résultats de la question précédente peuvent être utilisés pour calculer a_n, b_n et c_n en fonction de n.
   Remarque : Aucune expression finalisée de a_n, b_n et c_n n'est demandée.

(viii) **CCINP 104** : Soit n un entier naturel supérieur ou égal à 3.
On dispose de n boules numérotées de 1 à n et d'une boîte formée de trois compartiments identiques également numérotés de 1 à 3.
On lance simultanément les n boules .
Elles viennent se ranger aléatoirement dans les 3 compartiments.
Chaque compartiment peut éventuellement contenir les n boules.
On note X la variable aléatoire qui à chaque expérience aléatoire fait correspondre le nombre de compartiments restés vides.

1. Préciser les valeurs prises par X.
2. (a) Déterminer la probabilité $P(X = 2)$.
   (b) Finir de déterminer la loi de probabilité de X.

(ix) **CCINP 107**
On dispose de deux urnes U_1 et U_2.
L'urne U_1 contient deux boules blanches et trois boules noires.
L'urne U_2 contient quatre boules blanches et trois boules noires.
On effectue des tirages successifs dans les conditions suivantes : on choisit une urne au hasard et on tire une boule dans l'urne choisie. On note sa couleur et on la remet dans l'urne d'où elle provient.

- Si la boule tirée était blanche, le tirage suivant se fait dans l'urne U_1.
- Sinon le tirage suivant se fait dans l'urne U_2.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note B_n l'événement « la boule tirée au $n^{\text{ième}}$ tirage est blanche » et on pose $p_n = \mathbb{P}(B_n)$.

1. Calculer p_1.
2. Prouver que $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$, $p_{n+1} = -\dfrac{6}{35} p_n + \dfrac{4}{7}$.
3. En déduire, pour tout entier naturel n non nul, la valeur de p_n.