Programme de colle – MP2I

Applications linéaires

Extrait du programme officiel :

Contenus	Capacités & commentaires
a) Généralités	
Application linéaire. Opérations sur les applications linéaires : combinaison linéaire, composition. Isomorphisme, réciproque.	Espace vectoriel $\mathscr{L}(E,F)$ des applications linéaires de E dans F. Bilinéarité de la composition.
Image directe et image réciproque d'un sous-espace par une application linéaire. Image d'une application linéaire.	
Noyau d'une application linéaire.	Caractérisation de l'injectivité.
Si $(x_i)_{i\in I}$ est une famille génératrice de E et si $u \in \mathscr{L}(E,F)$, alors $\operatorname{Im} u = \operatorname{Vect}(u(x_i))_{i\in I}$.	
Application linéaire de rang fini.	Notation $\operatorname{rg}(u)$.
Le rang de $v \circ u$ est majoré par $\min(\operatorname{rg}(u), \operatorname{rg}(v))$. Invariance du rang par composition par un isomorphisme.	
b) Endomorphismes	
Identité, homothéties.	Notations id_E, id.
Anneau $(\mathscr{L}(E),+,\circ)$.	Non commutativité si $\dim E \geqslant 2$. Notation vu pour la composée $v \circ u$. Notation u^k pour $u \in \mathscr{L}(E)$ et $k \in \mathbb{N}$.
Projection ou projecteur, symétrie : définition géométrique, caractérisation par $p^2 = p$, par $s^2 = \mathrm{id}$.	On incite les étudiants à se représenter géométriquement ces notions par des figures en dimension 2 et 3.
Automorphismes. Groupe linéaire.	Notation $\mathrm{GL}(E)$. Notation u^k pour $u \in \mathrm{GL}(E)$ et $k \in \mathbb{Z}$.
c) Détermination d'une application linéaire	
Si $(e_i)_{i\in I}$ est une base de E et $(f_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de F, alors il existe une unique application $u \in \mathscr{L}(E,F)$ telle que, pour tout $i \in I$, $u(e_i) = f_i$.	Caractérisation de l'injectivité, de la surjectivité, de la bijectivité de u.
Espaces vectoriels isomorphes, caractérisation par la dimension. Pour une application linéaire entre deux espaces de même dimension finie, équivalence entre injectivité, surjectivité et bijectivité. Un endomorphisme d'un espace de dimension finie inversible à gauche ou à droite est inversible. Dimension de $\mathscr{L}(E,F)$ si E et F sont de dimension finie. Si E_1 et E_2 sont des sous-espaces de E tels que $E = E_1 \oplus E_2$, si $u_1 \in \mathscr{L}(E_1,F)$, $u_2 \in \mathscr{L}(E_2,F)$, il existe une unique application $u \in \mathscr{L}(E,F)$ coïncidant avec u_1 sur E_1 et avec u_2 sur E_2.	
d) Théorème du rang	
Forme géométrique du théorème du rang : si $u \in \mathscr{L}(E,F)$ et si S est un supplémentaire de $\operatorname{Ker} u$ dans E, alors u induit un isomorphisme de S sur $\operatorname{Im} u$. Théorème du rang : si E est de dimension finie n et $u \in \mathscr{L}(E,F)$, alors $n = \dim \operatorname{Ker} u + \operatorname{rg}(u)$.	

Contenus	Capacités & Commentaires
e) Formes linéaires et hyperplans	
Forme linéaire. Hyperplan, défini comme noyau d'une forme linéaire non nulle.	Formes coordonnées relativement à une base. Équations d'un hyperplan dans une base en dimension finie.
Si H est un hyperplan de E et D une droite non contenue dans H, alors $E = H \oplus D$. Réciproquement, tout supplémentaire d'une droite est un hyperplan.	En dimension n, les hyperplans sont exactement les sous-espaces de dimension $n-1$.
Comparaison de deux équations d'un même hyperplan. Si E est un espace de dimension finie n, l'intersection de m hyperplans est de dimension au moins $n-m$. Réciproquement, tout sous-espace de E de dimension $n-m$ est l'intersection de m hyperplans.	Système d'équations d'un sous-espace vectoriel; cas des droites vectorielles de $\mathbb{R}^2$, des droites et plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$. L'étude de la dualité est hors programme.

Table des matières

Semaine prochaine : Matrices d'applications linéaires.

Questions de cours

Les questions de cours précédées d'une ★ ne sont pas exigibles cette semaine des groupes 2 et 5 ayant colle d'informatique.

(i) Un calcul de développement limité.

(ii) Image directe et réciproque d'un sous-espace par une application linéaire.

(iii) ★ Effet sur le rang de la composée à gauche ou à droite par un isomorphisme.

(iv) Théorème du rang

(v) ★ Propriétés et caractérisation des projecteurs ou (exclusif) des symétries.

(vi) ★ $\dim E = \dim F \iff E$ et F sont isomorphes.
Équivalence lorsque $\dim E = \dim F = n$ entre : isomorphisme, injectif, surjectif, inversible à gauche, inversible à droite et $\operatorname{rg} u = n$.

(vii) Nouvelle démonstration de la supplémentarité des fonctions paires/impaires et de $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ (avec une symétrie).
Nouvelle démonstration de la formule de Grassmann (avec un isomorphisme).

(viii) **CCINP 62** : Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ tel que $f^2 - f - 2\mathrm{Id} = 0$.

1. Prouver que f est bijectif et exprimer f^{-1} en fonction de f.
2. Prouver que $E = \mathrm{Ker}(f + \mathrm{Id}) \oplus \mathrm{Ker}\,(f - 2\mathrm{Id})$:
3. Dans cette question, on suppose que E est de dimension finie.
   Prouver que $\mathrm{Im}(f + \mathrm{Id}) = \mathrm{Ker}\,(f - 2\mathrm{Id})$.

(ix) ★ **CCINP 93** : Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie $n > 0$ et $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $u^3 + u^2 + u = 0$. Montrer que $\mathrm{Im}\, u \oplus \mathrm{Ker}\, u = E$.

(x) **CCINP 60** : Soit la matrice $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ défini par : $f(M)=AM$.

1. Déterminer une base de Ker$f$.
2. f est-il surjectif ?
3. Déterminer une base de Imf.
4. A-t-on $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})=\operatorname{Ker} f \oplus \operatorname{Im} f$?

(xi) **CCINP 87** : Soient $a_0, a_1, \cdots, a_n$ $n+1$ réels deux à deux distincts.

1. Montrer que si $b_0, b_1, \cdots, b_n$ sont $n+1$ réels quelconques, alors il existe un unique polynôme P vérifiant $\deg P \leqslant n$ et $\forall i \in \{0, \cdots, n\}$ $P(a_i)=b_i$.
2. Soit $k \in [\![0, \ldots, n]\!]$. Expliciter ce polynôme P, que l'on notera L_k, lorsque
$$\forall i \in [\![0, \ldots, n]\!] \quad b_i = \begin{cases} 0 \text{ si } i \neq k \\ 1 \text{ si } i = k \end{cases}$$
3. Prouver que $\forall p \in [\![0, \ldots, n]\!]$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} a_k^p L_k = X^p$.

(xii) ★ **CCINP 90** : $\mathbb{K}$ désigne le corps des réels ou celui des complexes.
Soient a_1, a_2, a_3 trois scalaires distincts donnés de $\mathbb{K}$.

1. Montrer que
$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \mathbb{K}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^3 \\ & P & \longmapsto & \big(P(a_1), P(a_2), P(a_3)\big) \end{array}$$
est un isomorphisme d'espaces vectoriels.
2. On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de $\mathbb{K}^3$ et on pose $\forall k \in \{1,2,3\}$, $L_k = \Phi^{-1}(e_k)$.
   (a) Justifier que (L_1, L_2, L_3) est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.
   (b) Exprimer les polynômes L_1, L_2 et L_3 en fonction de a_1, a_2 et a_3.
3. Soit $P \in \mathbb{K}_2[X]$. Déterminer les coordonnées de P dans la base (L_1, L_2, L_3).
4. **Application :** On se place dans $\mathbb{R}^2$ muni d'un repère orthonormé et on considère les trois points $A(0,1), B(1,3), C(2,1)$.
Déterminer une fonction polynomiale de degré 2 dont la courbe passe par les points A, B et C.

(xiii) **CCINP 98** : Une secrétaire effectue, une première fois, un appel téléphonique vers n correspondants distincts.
On admet que les n appels constituent n expériences indépendantes et que pour chaque appel, la probabilité d'obtenir le correspondant demandé est p ($p \in]0,1[$).
Soit X la variable aléatoire représentant le nombre de correspondants obtenus.

1. Donner la loi de X. Justifier.
2. La secrétaire rappelle une seconde fois, dans les mêmes conditions, chacun des $n-X$ correspondants qu'elle n'a pas pu joindre au cours de la première série d'appels. On note Y la variable aléatoire représentant le nombre de personnes jointes au cours de la seconde série d'appels.
   (a) Soit $i \in [\![0, n]\!]$. Déterminer, pour $k \in \mathbb{N}$, $P(Y=k|X=i)$.
   (b) Prouver que $Z=X+Y$ suit une loi binomiale dont on déterminera le paramètre.
   Indication : on pourra utiliser, sans la prouver, l'égalité suivante : $\binom{n-i}{k-i}\binom{n}{i}=\binom{k}{i}\binom{n}{k}$.