

CORRIGÉ DU DEVOIR LIBRE N°13

Urnes de Pólya

1. Formule de Bayes : (R_1, B_1) est un système complet d'événements

$$\mathbb{P}(R_1|R_2) = \frac{\mathbb{P}(R_2|R_1)\mathbb{P}(R_1)}{\mathbb{P}(R_2|R_1)\mathbb{P}(R_1) + \mathbb{P}(R_2|B_1)\mathbb{P}(B_1)}$$

(probabilités non nulles vu ce qui suit), chaque tirage se faisant uniformément.

- Au premier tirage, r boules rouges et b boules blanches. $\mathbb{P}(B_1) = \frac{b}{r+b}$ et $\mathbb{P}(R_1) = \frac{r}{r+b}$.
- Sachant que R_1 est réalisé, l'urne au deuxième tirage contient $r+c$ boules rouges et b boules blanches donc $\mathbb{P}(R_2|R_1) = \frac{r+c}{r+b+c}$.
- Sachant que B_1 est réalisé, l'urne au deuxième tirage contient r boules rouges et $b+c$ boules blanches donc $\mathbb{P}(R_2|B_1) = \frac{r}{r+b+c}$.

$$\text{Au final, } \mathbb{P}(R_1|R_2) = \frac{\frac{r+c}{r+b+c} \cdot \frac{r}{r+b}}{\frac{r+c}{r+b+c} \cdot \frac{r}{r+b} + \frac{r}{r+b+c} \cdot \frac{b}{r+b}} = \frac{r+c}{r+c+b}$$

$$\text{Donc } \boxed{\mathbb{P}(R_1|R_2) = \mathbb{P}(R_2|R_1) = \frac{r+c}{r+b+c}}$$

2. On peut appliquer la formule des probabilités totales avec le système complet d'événements (R_1, B_1) :

$$\mathbb{P}(R_n) = \mathbb{P}(R_n|R_1)\mathbb{P}(R_1) + \mathbb{P}(R_n|B_1)\mathbb{P}(B_1).$$

Or $\mathbb{P}(R_n) = p_n(r, b)$ par définition, $\mathbb{P}(B_1) = \frac{b}{r+b}$ et $\mathbb{P}(R_1) = \frac{r}{r+b}$.

De plus, l'expérience qui consiste à tirer une boule rouge au n^{e} tirage sachant qu'on avait tiré une boule rouge au premier tirage avec r boules rouges et b boules blanches est exactement la même que celle qui consiste à tirer une boule rouge au $n-1^{\text{e}}$ tirage à partir d'une urne contenant $r+c$ boules rouges et b boules blanches. Ainsi, $\mathbb{P}(R_n|R_1) = p_{n-1}(r+c, b)$. De la même manière, $\mathbb{P}(R_n|B_1) = p_{n-1}(r, b+c)$.

$$\text{Finalement, } \boxed{p_n(r, b) = \frac{r}{r+b} p_{n-1}(r+c, b) + \frac{b}{r+b} p_{n-1}(r, b+c)}$$

3. Par récurrence sur n , $\mathbb{P}(R_1) = p_1(r, b) = \frac{r}{r+b}$ et si pour un $n \geq 2$, pour tous r et b , $p_{n-1}(r, b) = \frac{r}{r+b}$, alors d'après la question précédente,

$$p_n(r, b) = \frac{r}{r+b} \cdot \frac{r+c}{r+b+c} + \frac{b}{r+b} \cdot \frac{r}{r+b+c} = \frac{r}{r+b}$$

ce qui établit la récurrence.

$$\text{Donc } \boxed{\text{pour tout } n, \mathbb{P}(R_n) = \frac{r}{r+b}}$$

Remarquable ! Même si le contenu de l'urne change, la probabilité d'obtenir une boule rouge à chaque tirage ne change pas !

4. De la même manière, si $n > m \geq 2$, on a

$$\mathbb{P}(R_m \cap R_n) = \mathbb{P}(R_m \cap R_n|R_1)\mathbb{P}(R_1) + \mathbb{P}(R_m \cap R_n|B_1)\mathbb{P}(B_1),$$

avec $\mathbb{P}(R_m \cap R_n) = p_{m,n}(r, b)$, $\mathbb{P}(R_m \cap R_n|R_1) = p_{m-1, n-1}(r+c, b)$ et $\mathbb{P}(R_m \cap R_n|B_1) = p_{m-1, n-1}(r, b+c)$. Donc

$$p_{m,n}(r, b) = \frac{r}{r+b} p_{m-1, n-1}(r+c, b) + \frac{b}{r+b} p_{m-1, n-1}(r, b+c).$$

On montre par récurrence sur $m \geq 1$ que pour tous r et b et tout $n > m$,

$$\boxed{p_{m,n}(r, b) = \frac{r(r+c)}{(r+b)(r+b+c)}}.$$

Si $m=1$, si $n > 1$, $p_{1,n}(r, b) = \mathbb{P}(R_1 \cap R_n) = \mathbb{P}(R_n|R_1)\mathbb{P}(R_1) = p_n(r+c, b) \frac{r}{r+b} = \frac{r(r+c)}{(r+b)(r+b+c)}$.

Si c'est vrai pour $m-1$, et si $n > m$, alors $n-1 > m-1$ et

$$\begin{aligned} p_{m,n}(r, b) &= \frac{r}{r+b} p_{m-1, n-1}(r+c, b) + \frac{b}{r+b} p_{m-1, n-1}(r, b+c) \\ &= \frac{r}{r+b} \cdot \frac{r(r+c)}{(r+b+c)(r+b+2c)} + \frac{b}{r+b} \cdot \frac{r(r+c)}{(r+b+c)(r+b+2c)} \\ &= \frac{r(r+c)}{(r+b)(r+b+c)} \end{aligned}$$

ce qui établit la récurrence.

Remarquable ! A nouveau, c'est indépendant de n et m .

Via la formule des probabilités composées, on obtient par la même occasion que $\mathbb{P}(R_n|R_m)$ ne dépendant ni de n , ni de m .

5. Comme (R_n, B_n) est un système complet d'événements,

$$\boxed{\mathbb{P}(R_m \cap B_n)} = \mathbb{P}(R_m) - \mathbb{P}(R_m \cap R_n) = \frac{r}{r+b} - \frac{r(r+c)}{(r+b)(r+b+c)} = \boxed{\frac{rb}{(r+b)(r+b+c)}}.$$

Même remarque.