

Devoir Libre n° 16

Exercice 1 : Espaces de fonctions

1.a) On a nécessairement P et Q non nuls et si on appelle $a_p X^p$ et $b_q X^q$ leurs termes dominants respectif, alors $\ln x \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{a_p}{b_q} x^{p-q}$. Comme $\ln x \rightarrow +\infty$, $\deg P = p > \deg Q = q$.

1.b) $\frac{\ln x}{x} \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{a_p}{b_q} x^{p-q-1}$ et $\frac{\ln x}{x} \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ donc $p - q - 1 < 0$, soit $q < p < q + 1$ ce qui est contradictoire.

\ln n'est pas une fonction rationnelle.

2. Si $a_0 f_0 + a_1 f_1 + a_2 f_2 \equiv 0$, alors le polynôme $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2$ a une infinité de racines (\mathbb{R}_+^*) donc est le polynôme nul donc $a_0 = a_1 = a_2 = 0$. La famille (f_0, f_1, f_2) est libre.

Si $a_0 g_0 + a_1 g_1 + a_2 g_2 \equiv 0$, alors le polynôme $P = a_0 + a_1 X + a_2 X^2$ a une infinité de racines ($\mathbb{R}_+^* \setminus \{1\}$) donc est le polynôme nul donc $a_0 = a_1 = a_2 = 0$. La famille (g_0, g_1, g_2) est libre.

3. $F = \text{Vect}(f_0, f_1, f_2)$ et $G = \text{Vect}(g_0, g_1, g_2)$ sont des espaces vectoriels et vu la question précédente,

$\dim F = \dim G = 3$.

4. Si $f \in F \cap G$, alors on a des réels $a_0, a_1, a_2, b_0, b_1, b_2$ tels que

$$\forall x > 0, (b_0 + b_1 x + b_2 x^2) \ln x = (a_0 + a_1 x + a_2 x^2)$$

donc nécessairement $b_0 = b_1 = b_2 = 0$ vu le résultat de la question 1. Donc $F \cap G = \{0\}$.

F et G sont en somme directe.

5. E est un espace vectoriel sur \mathbb{R} comme somme de deux sous-espaces de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}_+^*}$ et comme F et G sont en somme directe, $\dim E = \dim F + \dim G = 6$.

6.a) $E' \subset E$, $E' \neq \emptyset$ car la fonction nulle est prolongeable par continuité en 0 et si $f, g \in E$ sont prolongeable par continuité en 0 et $\lambda \in \mathbb{R}$, $f + \lambda g$ l'est encore.

Donc E' est un sous-espace vectoriel de E .

Autre possibilité : Si $f \in E$, on peut écrire $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + (b_0 + b_1 x + c_1 x^2) \ln x$ qui admet une limite finie en 0 si et seulement si $b_0 = 0$. Donc $E' = \text{Vect}(f_0, f_1, f_2, g_1, g_2)$, sous-espace vectoriel de E .

6.b) $(f_0, f_1, f_2, g_1, g_2)$ base de E' et $(f_0, f_1, f_2, g_1, g_2, g_0)$ base de E .

Donc $\text{Vect } g_0 = \text{Vect}(\ln)$ est un supplémentaire de E' dans E .

Exercice 2 : Calcul de puissances de matrices

1. On a $3 = \dim \mathbb{R}^3$ vecteurs (e'_1, e'_2, e'_3) de \mathbb{R}^3 , il suffit de montrer que la famille est libre. Si

on a $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$ tels que $\lambda e'_1 + \mu e'_2 + \nu e'_3 = (0, 0, 0)$, alors
$$\begin{cases} \lambda + \mu + \nu = 0 \\ \lambda - \mu + \nu = 0 \\ \lambda - 2\nu = 0 \end{cases}$$
 c'est-à-dire,

en soustrayant la première équation aux deux autres,
$$\begin{cases} \lambda + \mu + \nu = 0 \\ -2\mu = 0 \\ -\mu - 3\nu = 0 \end{cases}$$
 donc

$\mu = 0$ puis $\nu = 0$ et $\lambda = 0$.

La famille est donc libre en dimension 3 : (e'_1, e'_2, e'_3) est une base de \mathbb{R}^3 .

2. En utilisant l'une des méthodes vues en cours, on obtient
$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$
 inver-

sible et
$$P^{-1} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

3. On calcule
$$D = P^{-1} S P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

4. Montrons par récurrence sur n que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: « $S^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$ ».

■ **Initialisation :** $D^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$: propriété vraie pour $n = 0$.

■ **Hérédité :** Soit $n \geq 0$ pour lequel l'expression de D^n est vraie. Alors

$$D^{n+1} = D^n D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{n+1} & 0 \\ 0 & 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix}.$$

La récurrence est établie, et donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^n & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}$.

5. Récurrence : $I_3 = P I_3 P^{-1}$ et si on se fixe $n \in \mathbb{N}$ pour lequel $S^n = P D^n P^{-1}$, alors

$$S^{n+1} = P D^n P^{-1} P D P^{-1} = P D^{n+1} P^{-1}.$$

6. On obtient alors
$$S^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1+2^{n+1} & 1-2^n & 1-2^n \\ 1-2^n & 1+2^{n+1} & 1-2^n \\ 1-2^n & 1-2^n & 1+2^{n+1} \end{pmatrix}.$$

7. Comme $I_3 \neq 0_{\mathcal{M}_3(\mathbb{R})}$ et S n'est pas de la forme $\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$, les matrices S

et I_3 ne sont pas colinéaires et la famille (I_3, S) est libre.

8. On calcule

$$S^2 = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Donc $S^2 = -2I_3 + 3S$.

9. Montrons par récurrence sur n que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\mathcal{P}(n)$: « $S^n \in \text{Vect}(I_3, S)$. »

■ **Initialisation** : $S^0 = I_3 \in \text{Vect}(I_3, S)$: propriété vraie pour $n = 0$.

■ **Hérédité** : Soit $n \geq 0$ pour lequel $S^n \in \text{Vect}(I_3, S)$, alors $S^n = aI_3 + bS$ où $a, b \in \mathbb{R}$ et

$$S^{n+1} = S^n S = (aI_3 + bS)S = aS + bS^2 \in \text{Vect}(I_3, S).$$

La récurrence est établie, et comme (I_3, S) est une famille libre, c'est une base de $\text{Vect}(I_3, S)$ et les coefficients dans cette base sont donc uniques.

Finalement, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\exists!(a_n, b_n) \in \mathbb{R} \mid S^n = a_n I_3 + b_n S$.

10. $S^0 = I_3$ et $S^1 = S$, donc $a_0 = 1$, $b_0 = 0$, $a_1 = 0$ et $b_1 = 1$.

De plus, si $n \in \mathbb{N}$,

$$S^{n+1} = S^n S = (a_n I_3 + b_n S)S = a_n S + b_n S^2 = -2b_n I_3 + (a_n + 3b_n)S$$

vu la question 8.

Donc, par unicité des coefficients, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} a_{n+1} = -2b_n \\ b_{n+1} = a_n + 3b_n \end{cases}$

11. Pour tout entier n , on a $a_{n+1} + b_{n+1} = -2b_n + a_n + 3b_n = a_n + b_n$.

Donc la suite $(a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est constante et la constante est $a_0 + b_0 = 1$.

Par conséquent, pour tout entier n , $b_{n+1} + 1 = a_n + 3b_n + 1 = 2b_n + 2 = 2(b_n + 1)$.

Ainsi, la suite $(b_n + 1)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique de raison 2.

12. Comme $(b_n + 1)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison 2, on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n + 1 = 2^n(b_0 + 1)$ et $b_0 = 0$.

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n = 2^n - 1$. De plus, la suite $(a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite constante $(1)_{n \in \mathbb{N}}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $a_n = 2 - 2^n$.

14. $X^2 - 3X + 2 = (X - 1)(X - 2)$ donc la division euclidienne s'écrit

$$X^n = (X^2 - 3X + 2)Q + \alpha X + \beta$$

donc en évaluant en 1 et 2 : $\alpha + \beta = 1$ et $2\alpha + \beta = 2^n$.

Le reste est donc $(2^n - 1)X + (2 - 2^n)$.

15. Comme $S^2 - 3S + 2I_3 = 0$, en évaluant la division en S , on obtient $S^n = (2^n - 1)S + (2 - 2^n)I_3$.

17. On calcule $B = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B^2 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = -B$, on en déduit, par récurrence, que pour tout entier $n \geq 1$, $B^n = (-1)^{n+1}B$.

En effet, $B^1 = (-1)^2 B$ et si $B^n = (-1)^{n+1}B$ pour un $n \geq 1$,

$$B^{n+1} = B^n B = (-1)^{n+1} B B = (-1)^{n+1} B^2 = (-1)^{n+1} (-B) = (-1)^{n+2} B$$

La récurrence est établie. Donc $B^0 = I_3$ et pour tout entier $n \geq 1$, $B^n = (-1)^{n+1}B$.

18. On a $S = B + 2I_3$, et comme B et $2I_3$ commutent, on peut appliquer la formule du binôme de Newton : si $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} S^n &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} B^k = - \left(\sum_{k=1}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} (-1)^k \right) B + 2^n I_3 \quad (\text{car si } k \geq 1, B^k = (-1)^{k+1} B.) \\ &= - \left(\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 2^{n-k} (-1)^k - 2^n \right) B + 2^n I_3 = -((2-1)^n - 2^n) B + 2^n I_3 \\ &= (2^n - 1)B + 2^n I_3 \end{aligned}$$

De plus $S^0 = I_3 = (2^0 - 1)B + 2^0 I_3$, donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S^n = (2^n - 1)B + 2^n I_3$.

19. Comme $B = S - 2I_3$, on obtient que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S^n = (2^n - 1)(S - 2I_3) + 2^n I_3 = (2^n - 1)S + (2 - 2^n)I_3.$$

On retrouve bien l'expression de a_n et b_n .

20. L'expression est valable pour $n \in \mathbb{Z}$ si et seulement si pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$((2^{-n} - 1)B + 2^{-n} I_3) S^n = I_3.$$

Or, si $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} ((2^{-n} - 1)B + 2^{-n} I_3) S^n &= ((2^{-n} - 1)B + 2^{-n} I_3)((2^n - 1)B + 2^n I_3) \\ &= (2 - 2^{-n})(2 - 2^n)I_3 + ((2^{-n} - 1)(2 - 2^n) + (2^n - 1)(2 - 2^{-n}))S \\ &\quad + (2^{-n} - 1)(2^n - 1)S^2 \\ &= (5 - 2^{-n+1} - 2^{n+1})I_3 - 3(2^{-n} + 2^n - 2)S \\ &\quad - (2^{-n} + 2^n - 2)(-2I_3 + 3S) \\ &= (5 - 2^{-n+1} - 2^{n+1} - 4 + 2^{-n+1} + 2^{n+1})I_3 = I_3 \end{aligned}$$

Donc S^n est inversible et son inverse S^{-n} est donnée par l'expression de la question précédente.

L'expression trouvée à la question précédente est donc valable pour $n \in \mathbb{Z}$.

On peut aussi utiliser le raisonnement de la question 5 pour $n \in \mathbb{Z}$ directement.

Fin