Devoir Libre n° 17

Problème 1 : Algèbre linéaire

Dans tout ce problème, a désigne un réel **différent de 1**.

On se propose d'étudier les suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant une relation de récurrence du type :

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\quad u_{n+1}=a\,u_n+P(n)$$

où P est un polynôme (confondu avec la fonction polynomiale).

I. Cas où P est constant

Dans cette partie, on pose $E_a^{(0)}=\left\{u\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\ ;\ \exists\, b\in\mathbb{R},\ \ \forall\, n\in\mathbb{N},\ \ u_{n+1}=a\,u_n+b\right\}$.

On remarquera que pour une suite $u\in E_a^{(0)}$, b dépend de u. On notera $b=b_u$.

1. Montrer que $E_a^{(0)}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

2. Soit x la suite constante égale à 1 (pour tout n de $\mathbb{N}$, $x_n=1$) et soit y la suite définie par pour tout n, $y_n=a^n$.

2.a) Montrer que x et y appartiennent à $E_a^{(0)}$.

2.b) Montrer que (x,y) est une famille libre.

2.c) Déterminer le terme général u_n d'une suite $u\in E_a^{(0)}$.

2.d) Montrer que (x,y) une base de $E_a^{(0)}$. Quelle est sa dimension ?

II. Cas général

On fixe un entier naturel p et on pose

$$E_a^{(p)}=\left\{u\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\ ;\ \exists\, P\in\mathbb{R}_p[X],\ \ \forall\, n\in\mathbb{N},\ \ u_{n+1}=a\,u_n+P(n)\right\}.$$

1. Justifier que l'application φ de $\mathbb{R}_p[X]$ dans $\mathbb{R}^{p+1}$ définie par

$$\varphi(P)=(P(0),P(1),\dots,P(p))$$

est un isomorphisme.

2. Soit $u\in E_a^{(p)}$. Il existe donc un polynôme $P\in\mathbb{R}_p[X]$ tel que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=a\,u_n+P(n)$. Montrer l'unicité de P. On notera $P=P_u$ pour $u\in E_a^{(p)}$.

3. Montrer que $E_a^{(p)}$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.

4. Montrer que l'application θ définie sur $E_a^{(p)}$ par $\theta(u)=P_u$ est une application linéaire de $E_a^{(p)}$ dans $\mathbb{R}_p[X]$.

5. Déterminer le noyau de θ.

6. Pour $k\in\mathbb{N}$, on pose $Q_k=(X+1)^k-aX^k$.

6.a) Quel est le degré de Q_k ?

6.b) Montrer que la famille $(Q_0,Q_1,\dots,Q_p)$ est une base de $\mathbb{R}_p[X]$.

7. Montrer que pour tout $k\in[\![0,p]\!]$, Q_k est dans $\operatorname{Im}\theta$. Que peut-on en conclure ?

8. Déduire des questions précédentes la dimension de $E_a^{(p)}$.

9. Pour $k\in[\![0,p]\!]$, on pose la suite $x^{(k)}$ définie par, pour tout n, $x_n^{(k)}=n^k$. On rappelle que y est la suite définie par pour tout n, $y_n=a^n$. Montrer que $\left(x^{(0)},\dots,x^{(p)},y\right)$ est une base de $E_a^{(p)}$.

10. Application : résoudre

$$\begin{cases}\forall\, n\in\mathbb{N},\quad u_{n+1} &= 2u_n-2n+7\\ \qquad\qquad u_0 &= -2\end{cases}$$

Problème 2 : Probabilités

On demande de justifier pertinemment les résultats obtenus, les théorèmes utilisés et de bien vérifier leurs hypothèses.

Soient $N\in\mathbb{N}^*$, $n\in[\![0,N]\!]$ et $k\in\mathbb{N}$.

Un sac contient $N+k$ billes distribués de la manière suivante :

- n billes sont gagnantes,
- $N-n$ billes sont perdantes,
- k billes sont des jokers.

Le but de ce problème est d'étudier l'expérience aléatoire suivante : on tire au hasard une bille dans le sac :

- Si elle est gagnante ou perdante, on s'arrête.
- Si c'est un joker, on ne la remet pas dans le sac et on tire de nouveau un bille.

L'expérience s'arrête dès que l'on a tiré une bille gagnante (et on a gagné) ou perdante (et on a perdu). On note p_k la probabilité de gagner.

On s'intéresse au résultat de chaque tirage, et on considère les événements :

- G_i : « on obtient une bille gagnante au i^{e} tirage »,
- J_i : « on obtient une bille joker au i^{e} tirage ».

Les différentes méthodes sont bien sûr indépendantes, ne pas réutiliser un résultat d'une autre méthode.

Il faut TOUT justifier **TRÈS SOIGNEUSEMENT** !

Cas où il n'y a pas de joker

Dans cette partie, $k=0$. Il y a donc très exactement un tirage.

1. Donner un espace probabilisé décrivant l'expérience.

2. Calculer la probabilité p_0 de gagner.

Cas où il y a 2 jokers

On suppose ici que $k=2$. Le nombre totale de bille est donc $N+2$ et il y a au plus 3 tirages.

3. Calculer $\mathbb{P}(J_1)$, $\mathbb{P}(J_2|J_1)$ et $\mathbb{P}(J_1 \cap J_2)$.

4. Calculer $\mathbb{P}(G_1)$, $\mathbb{P}(G_2|J_1)$ et $\mathbb{P}(G_3|J_1 \cap J_2)$.

5. Exprimer l'événement G : « On gagne » en fonction des G_i et des J_i.

6. En déduire la probabilité p_2 de gagner. Comparer avec p_0.

Cas général

On suppose désormais que k est quelconque.

7. Déterminer le nombre maximal de tirages.

8. Soit C_i l'événement « On gagne au bout de i tirages ».
Exprimer C_i à l'aide des G_j et des J_j pour des valeurs de i à préciser.

9. Démontrer que $\mathbb{P}(C_i) = \dfrac{n\binom{k+1}{i}}{(k+1)\binom{N+k}{i}}$.

10. Exprimer, pour $0 \leqslant p \leqslant m$, $\binom{m+1}{p+1}$ à l'aide de $\binom{m}{p}$.

11. Montrer par récurrence sur $k \in \mathbb{N}$ que $\displaystyle\sum_{i=1}^{k+1} \frac{\binom{k+1}{i}}{\binom{N+k}{i}} = \frac{k+1}{N}$.

12. En déduire la probabilité p_k de gagner et conclure.

Une autre méthode, directe

On réalise le même jeu mais cette fois on considère que l'on tire toutes les billes du sac. Cependant, seule la première bille non joker permet de déterminer si l'on gagne ou non.

13. Décrire un univers pour modéliser l'expérience, de cardinal $\binom{N+k}{k}\binom{N}{n}$.

14. Décrire l'événement P : « On perd » et calculer $|P|$.

15. Retrouver la probabilité p_k de gagner.

Une autre méthode, par récurrence

16. Montrer à l'aide d'un argument probabiliste que pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$p_{k+1} = \frac{k+1}{N+k+1} p_k + \frac{n}{N+k+1}.$$

17. Déterminer une solution c constante de cette récurrence.

18. En considérant la suite $(p_k - c)_{k \in \mathbb{N}}$, conclure.

FIN DE L'ÉNONCÉ