

Représentation matricielle des applications linéaires

MATRICES ET APPLICATIONS LINÉAIRES

1 Matrice d'une application linéaire dans des bases

a Matrice d'un ou plusieurs vecteurs

Définition 1 : Matrice d'un vecteur

Soit E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie $n \neq 0$ et $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base de E .

Si $\vec{x} = x_1\vec{e}_1 + \dots + x_n\vec{e}_n \in E$, de coordonnées (x_1, \dots, x_n) dans \mathcal{B} , on appelle **matrice de \vec{x} dans la base \mathcal{B}** la matrice colonne

$$X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$$

Propriété 1

L'application $\begin{cases} E & \longrightarrow \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \\ \vec{x} & \longmapsto X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\vec{x}) \end{cases}$ est un isomorphisme.

Définition 2 : Matrice d'une famille de vecteurs

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$, E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie n , $\mathcal{F} = (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p) \in E^p$ une famille de p vecteurs de E , $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base de E .

Pour tout $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$, on note $(x_{1,j}, \dots, x_{n,j})$ les coordonnées de \vec{x}_j dans la base \mathcal{B} (ie

$$\vec{x}_j \xleftrightarrow{\mathcal{B}} X_j = \begin{pmatrix} x_{1,j} \\ \vdots \\ x_{n,j} \end{pmatrix}.)$$

On appelle **matrice de la famille \mathcal{F} dans la base \mathcal{B}** la matrice rectangulaire

$$A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p) = \left(X_1 \mid X_2 \mid \dots \mid X_p \right) \\ = \begin{pmatrix} x_{1,1} & \dots & x_{1,p} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n,1} & \dots & x_{n,p} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

On place dans les colonnes les coordonnées dans \mathcal{B} des vecteurs de \mathcal{F} :

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \left(\begin{array}{c|c|c|c} & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & \dots & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \\ \hline & & & \end{array} \right) \begin{array}{l} \text{selon } \vec{e}_1 \\ \text{selon } \vec{e}_2 \\ \vdots \\ \text{selon } \vec{e}_n \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} \uparrow & \uparrow & & \uparrow \\ \vec{x}_1 & \vec{x}_2 & \dots & \vec{x}_p \end{array}$$

Propriété 2

L'application

$$\begin{cases} E^p & \longrightarrow \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p) & \longmapsto A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p) \end{cases}$$

est un isomorphisme.

b Matrice d'une application linéaire

Définition 3 : Matrice d'une application linéaire

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$, E, F des \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie, $p = \dim E$ et $n = \dim F$, $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ une base de E et $\mathcal{C} = (\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n)$ une base de F et $u \in \mathcal{L}(E, F)$.

On appelle **matrice de l'application linéaire u dans les bases \mathcal{B} au départ et \mathcal{C} à l'arrivée** la matrice rectangulaire

$$A = \text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(u) = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(u(\mathcal{B})) \\ = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(u(\vec{e}_1), \dots, u(\vec{e}_p)) \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

Lorsque $u \in \mathcal{L}(E)$ ($E = F$: endomorphisme) et $\mathcal{B} = \mathcal{C}$, on note $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u(\mathcal{B})) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Propriété 3

L'application

$$\begin{cases} \mathcal{L}(E, F) & \longrightarrow \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ u & \longmapsto A = \text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(u) \end{cases}$$

est un isomorphisme (d'espaces vectoriels.)



c Images de vecteurs et matrices

Propriété 4 : Images de vecteurs et matrices

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$, E, F des \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie, $p = \dim E$ et $n = \dim F$, \mathcal{B} une base de E et \mathcal{C} une base de F et $u \in \mathcal{L}(E, F)$.
Pour tout $\vec{x} \in E$,

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}}(u(\vec{x})) = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\vec{x}).$$

Autrement dit, $y = u(x)$ se traduit matriciellement par $Y = AX$ avec des notations évidentes.

d Composition d'applications linéaires et matrices

Propriété 5 : Matrice d'une composée

Soient $n, p, q \in \mathbb{N}^*$, E, F, G des \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie, $p = \dim E$, $n = \dim F$, $q = \dim G$, $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_p)$ une base de E , $\mathcal{C} = (\vec{f}_1, \dots, \vec{f}_n)$ une base de F , $\mathcal{D} = (\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_q)$ une base de G , $u \in \mathcal{L}(E, F)$ et $v \in \mathcal{L}(F, G)$.

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{D}}(v \circ u) = \text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{D}}(v) \times \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u).$$

Propriété 6 : Isomorphisme de \mathbb{K} -algèbres

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie n , \mathcal{B} une base de E .

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}(E) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ u \longmapsto \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) \end{array} \right.$$

est un isomorphisme de \mathbb{K} -algèbres.

Propriété 7 : Caractérisations de l'inversibilité

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Sont équivalentes :

- (i) A est inversible
- (ii) Toute application linéaire représentée par A est un isomorphisme
- (iii) A représente un isomorphisme
- (iv) A est inversible à gauche ou à droite

De plus, si c'est le cas et si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ tel que $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u)$, alors $A^{-1} = \text{Mat}_{\mathcal{C}, \mathcal{B}}(u^{-1})$.

2 Application linéaire canoniquement associée

a Définition

Définition 4 : Application linéaire canoniquement associée

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
On appelle **application linéaire canoniquement associée à A** l'unique $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p, \mathbb{K}^n)$ dont la matrice dans les bases canoniques est A .

Ainsi, écrire $(y_1, \dots, y_n) = u(x_1, \dots, x_p)$ revient à écrire $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$.
Les colonnes de A contiennent les images par u des vecteurs de la base canonique de \mathbb{K}^p .

b Image, noyau, rang d'une matrice

Définition 5 : Image, noyau, rang d'une matrice

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, u l'application linéaire canoniquement associée à A . On définit **l'image**, le **noyau** et le **rang** de A par :
 $\text{Ker } A = \left\{ X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \mid AX = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$, correspondant à $\text{Ker } u = \{ \vec{x} \in \mathbb{K}^p \mid u(\vec{x}) = \vec{0}_{\mathbb{K}^n} \}$.
 $\text{Im } A = \{ AX \mid X \in \mathcal{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \}$, correspondant à $\text{Im } u = \{ u(\vec{x}) \mid \vec{x} \in \mathbb{K}^p \}$.

$$\text{rg } A = \text{rg } u = \dim(\text{Im } A)$$

Propriété 8 : Image, rang et colonnes ; formule du rang

Soit $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de colonnes C_1, \dots, C_p .

- (i) $\text{Im } A = \text{Vect}(C_1, \dots, C_p)$.
- (ii) $\text{rg } A = \text{rg}(C_1, \dots, C_p)$.
- (iii) $\text{rg } A + \dim(\text{Ker } A) = p$.

Propriété 9 : Inversibilité des matrices de passage

- (i) Toute matrice de passage est inversible et $\begin{pmatrix} P_{\mathcal{B}'} \\ P_{\mathcal{B}} \end{pmatrix}^{-1} = P_{\mathcal{B}}$.
- (ii) Toute matrice inversible est une matrice de passage.
Plus précisément si E est de dimension n , \mathcal{B} une base de E et $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$, alors on peut trouver une base \mathcal{B}' de E telle que $A = P_{\mathcal{B}}$.



Méthode : Inversion de matrice

Pour inverser une matrice carrée A , on l'interprète comme matrice de passage d'une base \mathcal{B} à une base \mathcal{B}' et on exprime les vecteurs de \mathcal{B}' en fonction de ceux de \mathcal{B} pour former la matrice de passage d'une base \mathcal{B}' à une base \mathcal{B} , c'est-à-dire A^{-1} .

C Formules de changement de bases

Propriété 10 : Changement de base d'un vecteur

Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E , $\vec{x} \in E$.
Si $X = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\vec{x})$ et $X' = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(\vec{x})$, alors

$$X = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'} \times X'$$

Propriété 11 : Changement de base pour une application linéaire

Soient E, F des \mathbb{K} -espaces vectoriels de dimension finie, $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E , $\mathcal{C}, \mathcal{C}'$ deux bases de F , $u \in \mathcal{L}(E, F)$.
Soient $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}, \mathcal{C}}(u)$ et $A' = \text{Mat}_{\mathcal{B}', \mathcal{C}'}(u)$. Alors

$$A' = P_{\mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}} \times A \times P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$$

c'est-à-dire, si $P = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$ et $Q = P_{\mathcal{C}' \rightarrow \mathcal{C}}$,

$$A' = Q^{-1}AP \quad \text{ie} \quad A = QA'P^{-1}$$

Corollaire 1 : Changement de base pour un endomorphisme

Soient E un \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux bases de E , $u \in \mathcal{L}(E)$.
Soient $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ et $A' = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u)$. Alors

$$A' = P_{\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}} \times A \times P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$$

c'est-à-dire, si $P = P_{\mathcal{B}' \rightarrow \mathcal{B}}$

$$A' = P^{-1}AP \quad \text{ie} \quad A = PA'P^{-1}$$

3 Matrices équivalentes et rang

a Relation d'équivalence

Définition 6 : Matrices équivalentes

Une matrice A de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est dite **équivalente** à une autre matrice B de $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ si on peut trouver $U \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et $V \in \mathcal{GL}_p(\mathbb{K})$ telles que

$$A = UBV$$

Propriété 12 : Relation d'équivalence

On définit ainsi une relation d'équivalence sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Propriété 13 : Caractérisation géométrique

Deux matrices de même format sont équivalentes si et seulement si elles représentent une même application linéaire dans des bases différentes.

Propriété 14 : Transposée de matrices équivalentes

A et B sont équivalentes si et seulement si A^T et B^T le sont.

b Lien avec le rang

On rappelle que le rang d'une matrice est celui de l'application linéaire canoniquement associée ou encore celui de la famille de ses vecteurs colonnes.

Propriété 15 : Matrices équivalentes et rang

Deux matrices équivalentes ont même rang.

Propriété 16 : Caractérisation du rang d'une application linéaire par la matrice J_r

Si une application linéaire $u \in \mathcal{L}(E, F)$ est de rang r , alors il existe des bases \mathcal{B} de E et \mathcal{C} de F dans lesquelles u est représentée par

$$J_r = \begin{pmatrix} I_r & (0) \\ (0) & 0_{n-r, p-r} \end{pmatrix}$$



Théorème 1 : Caractérisation du rang d'une matrice par la matrice J_r

Une matrice $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est de rang r si et seulement si elle est équivalente à J_r .

Corollaire 2

Deux matrices de même format sont équivalentes si et seulement si elles ont même rang.

Corollaire 3 : Rang et transposée

- (i) Si $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $\text{rg } A = \text{rg } (A^T)$.
- (ii) Le rang d'une matrice est celui de la famille de ses vecteurs lignes.
- En particulier, une matrice carrée est inversible si et seulement si ses vecteurs lignes forment une famille libre.

Propriété 17 : Rang d'une matrice et des applications linéaires qu'elle représente

Le rang d'une matrice est égal au rang de n'importe quelle application linéaire qu'elle représente.

4 Rang et matrices extraites

Définition 7 : Matrice extraite

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
On appelle **matrice extraite** ou **sous-matrice** de A toute matrice dont les coefficients sont les $a_{i,j}$ pour $(i, j) \in I \times J$ avec $I \subset \llbracket 1, n \rrbracket$ et $J \subset \llbracket 1, p \rrbracket$.
On notera $A|_{I \times J}$ cette matrice, obtenue en supprimant des lignes et des colonnes de A .

Propriété 18 : Rang d'une sous-matrice

Soient $n, p \in \mathbb{N}^*$ et $A \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.
Pour toute sous-matrice R de A ,

$$\text{rg } R \leq \text{rg } A.$$

Propriété 19 : Caractérisation du rang par les matrices extraites

Le rang d'une matrice est l'ordre maximum de ses matrices extraites (carrées) inversibles.

5 Opérations élémentaires

Les opérations élémentaires sur les lignes ou les colonnes d'une matrice sont les transpositions (échanges), transvection, dilatations).

Propriété 20

- (i) Une opération élémentaire sur ses lignes ne change pas le noyau d'une matrice.
- (ii) Une opération élémentaire sur ses colonnes ne change pas l'image d'une matrice.
- (iii) Une opération élémentaire ne change pas le rang d'une matrice.

Définition 8 : Matrices échelonnées

Une matrice $M \in \mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ est dite **echelonnée** en lignes (respectivement en colonnes) si chaque ligne (respectivement colonne) débute par un nombre strictement croissant de 0 jusqu'à ce qu'elles soient éventuellement nulles.

Propriété 21

Toute matrice peut être transformée en une matrice échelonnée en lignes (resp. colonnes) par des opérations élémentaires sur les lignes (resp. colonnes.)

Propriété 22 : Rang d'une matrice échelonnée

Le rang d'une matrice échelonnée en lignes (resp. colonnes) est le nombre de lignes (resp. colonnes) non nulles.

II MATRICES SEMBLABLES

1 Définition

Définition 9 : Matrices semblables

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. A est dite **semblable** à B lorsqu'on l'on a $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que $A = PBP^{-1}$.

2 Propriétés

Propriété 23 : Relation d'équivalence

La relation de similitude est une relation d'équivalence dont les classes sont appelées **classes de similitudes**.

Propriété 24 : Caractérisation géométrique

$A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables si et seulement si elles représentent un même endomorphisme (dans des bases différentes.)

Propriété 25 : Puissances et matrices semblables

Soient $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ telles que $A = PBP^{-1}$.

- (i) $\forall k \in \mathbb{N}, A^k = PB^kP^{-1}$
- (ii) A inversible ssi B l'est, et si c'est le cas, la formule précédente est valable dans \mathbb{Z} .

Propriété 26 : La trace est un invariant de similitude

Si A et B sont semblables alors $\text{tr } A = \text{tr } B$. La réciproque est fausse.

Méthode : Vérifier si des matrices sont semblables

Pour montrer que deux matrices ne sont pas semblables, on trouve un invariant de similitude qui est différent pour les deux (trace, rang... on en verra d'autres plus tard).

Pour montrer que deux matrices sont semblables, on peut considérer un endomorphisme représenté par la première et construire une base dans laquelle il est représenté par la deuxième.

3 Trace d'un endomorphisme

Définition 10 : Trace d'un endomorphisme

Soit E \mathbb{K} -espace vectoriel de dimension finie, $u \in \mathcal{L}(E)$. On appelle **trace** de u , notée $\text{tr } u$, la trace de n'importe quelle matrice le représentant.

Propriété 27 : de la trace d'un endomorphisme

tr est une forme linéaire sur $\mathcal{L}(E)$ et si $u, v \in \mathcal{L}(E)$, $\text{tr}(u \circ v) = \text{tr}(v \circ u)$.

Propriété 28 : Trace d'un projecteur

La trace d'un projecteur est égale à son rang.

4 Diagonalisation (spé)

Définition 11 : Endomorphisme, matrice diagonalisable

$u \in \mathcal{L}(E)$ est dit **diagonalisable** si et seulement s'il existe une base dans laquelle sa matrice est diagonale.

$A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est dite **diagonalisable** si et seulement si elle est semblable à une matrice diagonale : $A = PDP^{-1}$ avec P inversible et D diagonale.

Définition 12 : Éléments propres

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ (respectivement $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$).

On appelle **valeur propre** de u (resp. A) tout $\lambda \in \mathbb{K}$ tel qu'il existe $\vec{x} \in E$ (resp. $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$) **non nul** tel que $u(\vec{x}) = \lambda\vec{x}$ (resp. $AX = \lambda X$).

Un tel vecteur **non nul** est appelé **vecteur propre** associé à la valeur propre λ .

On appelle **sous-espace propre** associé à la valeur propre λ le sous-espace $E_\lambda(u) = \text{Ker}(u - \lambda \text{id}_E) = \{\vec{x} \in E \mid u(\vec{x}) = \lambda\vec{x}\}$ (resp. $E_\lambda(A) = \text{Ker}(A - \lambda I_n) = \{X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mid AX = \lambda X\}$).

L'ensemble des valeurs propres de u (resp. A) est appelé son **spectre**, noté $\text{Sp } u$ (resp. $\text{Sp } A$).

Méthode : Diagonaliser une matrice

Pour diagonaliser une matrice (ou un endomorphisme), il faut former une base de vecteurs propres.

Une base diagonalisante est alors obtenue en mettant bout à bout des bases des sous-espaces propres.

Alors $A = PDP^{-1}$ avec $D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & (0) \\ & \ddots \\ (0) & \lambda_n \end{pmatrix}$ où $\lambda_1, \dots, \lambda_n$

sont les valeurs propres de A et où P est la matrice de passage de la base canonique à la base de vecteurs propres placés dans le même ordre que les valeurs propres.