Intégration

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. a, b sont des réels tels que $a < b$.

I Continuité uniforme

La continuité dont on a parlé jusqu'à maintenant était une propriété locale : au voisinage d'un point a, si je me reproche de a, alors mon image par f se rapproche de $f(a)$, ce qui s'écrit formellement : (Traduction de f continue sur I.)

Pour formaliser la notion d'intégrale, nous aurons besoin d'une continuité plus forte, globale : on va imposer que le η ne dépende pas de a.

Définition 1 : Uniforme continuité

Soit $f : I \to \mathbb{K}$. On dit que f est **uniformément continue** sur I si

Cela impose que si x et y sont suffisamment proches, mais n'importe où dans I, alors $f(x)$ et $f(y)$ sont proches également.

Ainsi, pour des fonctions à trop grandes variations, on pourra ne pas avoir uniforme continuité.

Propriété 1 : UC $\Longrightarrow$ C

Une fonction uniformément continue sur I est continue sur I.

Réciproque fausse.

Propriété 2 : Caractérisation séquentielle

f est uniformément continue sur I si et seulement si

Propriété 3 : Stabilité

Une combinaison linéaire, une composée de fonctions uniformément continue l'est encore.

⚠ Faux pour un produit ou un quotient.

Exemples 1

- **E1 –** Les fonctions constantes, $x \mapsto x$
- **E2 –** $f : x \mapsto ax + b$
- **E3 –** $f : x \mapsto |x|$
- **E4 –** $f : x \mapsto x^2$
- **E5 –** $f : x \mapsto \frac{1}{x}$
- **E6 –** $f : x \mapsto \sqrt{x}$

Remarque 1

La fonction $\sqrt{\cdot}$ vérifie

$$\forall x, y, \quad \sqrt{x} - \sqrt{y} \leqslant k \times \left|x - y\right|^{1/2}.$$

On dit qu'elle est $1/2$-hölderienne.

Toute fonction α-hölderienne est facilement uniformément continue.

Théorème 1 : de Heine

Tout fonction continue sur un segment est uniformément continue sur ce segment.

Propriété 4 : Lipschitzienne $\Longrightarrow$ UC

Toute fonction lipschitzienne (ou plus généralement hölderienne) sur I est uniformément continue sur I.

La réciproque est fausse.

Remarque 2

Implications entre f lipschitzienne, uniformément continue, continue.

Exemples 2

E 1 – $\sqrt{\cdot}$ est uniformément continue mais pas lipschitzienne

E 2 – Par inégalité des accroissements finis, une fonction continue sur I et dérivable sur $\mathring{I}$ (c'est le cas si elle est de classe $\mathscr{C}^1$) à dérivée bornée sera lipschitzienne donc uniformément continue. C'est le cas par exemple des fonctions $\sin$ et $\cos$.

II Fonctions continues par morceaux

1 Subdivisions

Définition 2 : Subdivision

On appelle **subdivision** de $[a,b]$ toute famille finie $\sigma = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ telle que

On appelle **pas de la subdivision** le réel

Lorsque $a_{k+1} - a_k$ ne dépend pas de k, on parle de **subdivision régulière**. Alors $h(\sigma) =$ et $\forall k \in [\![0,n]\!]$, $a_k =$

Une subdivision σ' de $[a,b]$ est dite **plus fine** que σ si **les** points de σ sont **des** points de σ' (σ' contient au moins tous les points de σ.)

2 Fonctions en escalier

Définition 3 : Fonctions en escalier

Une application $\varphi : [a,b] \to \mathbb{K}$ est dite **en escalier** si et seulement s'il existe une subdivision $\sigma = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ de $[a,b]$ telle que

On dit alors que σ est **adaptée** à φ.
On note $\mathscr{E}([a,b])$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a,b]$.

Exemple 1

Partie entière.

Remarques 1

R 1 – Si σ est adaptée à φ, toute subdivision plus fine l'est encore.

R 2 – Si σ et σ' sont adaptées à φ et ψ respectivement, on peut construire une subdivision σ'' plus fine que σ et σ' et donc adaptée à φ et ψ simultanément.

Propriété 5 : L'algèbre des fonctions en escalier

$\mathscr{E}([a,b])$ est une $\mathbb{K}$-algèbre. En particulier, si $\varphi, \psi \in \mathscr{E}([a,b])$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,

- $\varphi + \psi \in \mathscr{E}([a,b])$
- $\varphi \times \psi \in \mathscr{E}([a,b])$
- $\lambda\varphi \in \mathscr{E}([a,b])$

On a aussi $|\varphi| \in \mathscr{E}([a,b])$, et si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\inf(\varphi,\psi)$, $\sup(\varphi,\psi) \in \mathscr{E}([a,b])$.

3 Fonctions continues par morceaux

Définition 4 : Fonctions continues par morceaux

Une application $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ est dite **continue par morceaux** si et seulement s'il existe une subdivision $\sigma = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ de $[a,b]$ telle que

c'est-à-dire

On dit alors que σ est **adaptée** à f.
On note $\mathscr{C}_m([a,b])$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$.

Définition 5 : Extension à un intervalle quelconque

$f : I \to \mathbb{K}$ est dite continue par morceaux (sur I) si sa restriction à tout segment l'est.

Remarques 2

- **R1 –** Les fonctions en escalier, les fonctions continues sont continues par morceaux.
- **R2 –** Comme $f_{|]a_k,a_{k+1}[}$ est prolongeable par continuité à $[a_k, a_{k+1}]$, f est bornée et uniformément continue sur $]a_k, a_{k+1}[$ (mais les bornes ne sont pas nécessairement atteintes).
- **R3 –** Lorsque l'on modifie une fonction continue par morceaux en un nombre fini de point, on obtient une nouvelle fonction continue par morceaux.
- **R4 –** La restriction d'une fonction continue par morceaux l'est encore.

Propriété 6 : Continue par morceaux sur un segment ⇒ bornée

Toute fonction continue par morceaux sur un segment est bornée (mais les bornes ne sont pas nécessairement atteintes.)

Propriété 7 : L'algèbre des fonctions continues par morceaux

$\mathscr{C}_m([a,b])$ est une $\mathbb{K}$-algèbre. En particulier, si $f, g \in \mathscr{C}_m([a,b])$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

- $f+g \in \mathscr{C}_m([a,b])$
- $f \times g \in \mathscr{C}_m([a,b])$
- $\lambda f \in \mathscr{C}_m([a,b])$

On a aussi $|\varphi| \in \mathscr{C}_m([a,b])$, et si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\inf(\varphi,\psi)$, $\sup(\varphi,\psi) \in \mathscr{C}_m([a,b])$.

Théorème 2 : Approximation uniforme des fonctions continues par des fonctions en escalier

Soient $f \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $\varphi, \psi \in \mathscr{E}([a,b])$ telles que

Théorème 3 : Approximations uniforme des fonctions CPM par des fonctions en escalier

Soient $f \in \mathscr{C}_m([a,b],\mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $\varphi, \psi \in \mathscr{E}([a,b])$ telles que

Corollaire 1 : Une version valable pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Soit $f \in \mathscr{C}_m([a,b],\mathbb{K})$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $\varphi \in \mathscr{E}([a,b])$ tel que

III Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment

1 Intégrale d'une fonction en escalier sur un segment

On définit l'intégrale d'une fonction en escalier comme la somme des aires algébriques des rectangles formés entre la courbe et l'axe des abscisses.

Définition 6 : Intégrale d'une fonction en escalier

Soit $\varphi \in \mathscr{E}([a,b])$, $\sigma = (a_0, \ldots, a_n)$ subdivision adaptée à φ.

On définit **l'intégrale de φ sur $[a,b]$** par

où y_k est la valeur de φ sur $]a_k, a_{k+1}[$.

Propriété 8 : Indépendance de l'intégrale avec la subdivision

L'intégrale de $\varphi \in \mathscr{E}([a,b])$ sur $[a,b]$ ne dépend pas de la subdivision σ et est notée $\displaystyle\int_{[a,b]} \varphi$.

Remarque 3

On obtient en particulier l'intégrale des fonctions constantes.

Propriété 9 : Croissance et linéarité de l'intégrale

Si $\varphi, \psi \in \mathscr{E}([a,b])$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,

Croissance *Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\varphi \leqslant \psi$,*

$$\int_{[a,b]} \varphi \leqslant \int_{[a,b]} \psi.$$

Linéarité

$$\int_{[a,b]} (\varphi + \psi) = \int_{[a,b]} \varphi + \int_{[a,b]} \psi$$

et

$$\int_{[a,b]} (\lambda\varphi) = \lambda \int_{[a,b]} \varphi.$$

2 Extension aux fonctions continues par morceaux

a Cas réel

Propriété 10

Soit $f \in \mathscr{C}_m([a,b],\mathbb{R})$. Les ensembles

admettent respectivement une borne supérieure et inférieure, égales.

Définition 7 : Intégrale d'une fonction réelle continue par morceaux

Soit $f \in \mathscr{C}_m([a,b],\mathbb{R})$. On définit

$$\int_{[a,b]} f = \sup_{\substack{\varphi \in \mathscr{E}([a,b]) \\ \varphi \leqslant f}} \left(\int_{[a,b]} \varphi \right) = \inf_{\substack{\psi \in \mathscr{E}([a,b]) \\ \psi \geqslant f}} \left(\int_{[a,b]} \psi \right).$$

Remarques 3

R1 – $\int_{[a,b]} f$ représente l'aire algébrique entre la courbe et l'axe des abscisses.

R2 – Dans le cas d'une fonction f en escalier, le $\sup$ est un $\max$ et l'$\inf$ est un $\min$, atteints pour $\varphi = \psi = f$ et on a donc bien la même intégrale.

R3 – Par définition, si φ et ψ sont en escalier telles que $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$, alors

$$\int_{[a,b]} \varphi \leqslant \int_{[a,b]} f \leqslant \int_{[a,b]} \psi.$$

b Cas complexe

Définition 8 : Intégrale d'une fonction complexe continue par morceaux

Soit $f \in \mathscr{C}_m([a,b],\mathbb{C})$. Alors $\mathfrak{Re}\, f, \mathfrak{Im}\, f \in \mathscr{C}_m([a,b],\mathbb{R})$ et on pose

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} \mathfrak{Re}\, f + \mathrm{i} \int_{[a,b]} \mathfrak{Im}\, f$$

Remarque 4

Par définition, $\mathfrak{Re}\left(\int_{[a,b]} f\right) = \int_{[a,b]} \mathfrak{Re}\, f$ et $\mathfrak{Im}\left(\int_{[a,b]} f\right) = \int_{[a,b]} \mathfrak{Im}\, f$.

3 Propriétés de l'intégrale

a Linéarité

Propriété 11 : Linéarité de l'intégrale

L'application $\left| \begin{array}{ccc} \mathscr{C}_m([a,b]) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ f & \longmapsto & \int_{[a,b]} f \end{array} \right.$ *est une forme linéaire, c'est-à-dire que pour toutes $f, g \in \mathscr{C}_m([a,b])$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,*

$$\int_{[a,b]} (f+g) = \int_{[a,b]} f + \int_{[a,b]} g$$

et

$$\int_{[a,b]} (\lambda f) = \lambda \int_{[a,b]} f.$$

Remarque 5

On ne change pas l'intégrale si on change la valeur en un nombre fini de points :

$\int f - \int g = \int (f-g) = 0$ car $f-g$ est en escalier nulle en un nombre fini de points.

b Propriétés liées à l'ordre

Propriété 12 : Positivité, croissance, inégalité triangulaire

Soit $f, g \in \mathscr{C}_m([a,b])$.

Positivité *Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $f \geqslant 0$,*

Réciproque fausse.

Croissance *Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $f \leqslant g$,*

Réciproque fausse.

Inégalité triangulaire *Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$,*

où $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$.

Définition 9 : Valeur moyenne

Soit f une fonction continue par morceau sur le segment $[a,b]$ où $a<b$.

On appelle **valeur moyenne** de f le nombre

Remarque 6

Raisonnable en remarquant que $\int_{[a,b]} f$ représente une somme continue des valeurs prises par f sur $[a,b]$.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, on vérifie sans mal que

$$\inf_{[a,b]} f \leqslant \frac{1}{b-a} \int_{[a,b]} f \leqslant \sup_{[a,b]} f$$

Exercice 1 : Formule de la moyenne

Montrer que si f est réelle et continue, alors il existe $c \in [a,b]$ tel que $f(c) = \frac{1}{b-a} \int_{[a,b]} f$.

c Propriétés liées à l'intervalle

Propriété 13 : Relation de Chasles

Si $a < b < c$, $f \in \mathscr{C}_m([a,c])$, alors $f_{|[a,b]} \in \mathscr{C}_m([a,b])$ et $f_{|[b,c]} \in \mathscr{C}_m([b,c])$ et

(abus de notation)

Notation 1

Pour $f \in \mathscr{C}_m([a,b])$, on note

On note aussi $\int_a^b f = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Propriété 14 : de l'intégrale avec la nouvelle notation

Si I intervalle, $a, b \in I$ (non nécessairement ordonnés).

(i) $\begin{array}{|ccc} \mathscr{C}_m(I) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ f & \longmapsto & \int_a^b f \end{array}$ *est linéaire.*

(ii) *Dans le cas où $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. On suppose que $f \leqslant g$.*

$$\text{Si } a \leqslant b,\quad \int_a^b f \leqslant \int_a^b g.$$

$$\text{Si } b \leqslant a,\quad \int_a^b f \geqslant \int_a^b g.$$

(iii) ⚠ *En général, si $a, b \in I$ et $f \in \mathscr{C}_m(I)$,*

(iv) *Si $a, b, c \in I$ et $f \in \mathscr{C}_m(I)$, $\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f$.*

Remarque 7
Les (iii) se résume par : il faut remettre les bornes dans le bon sens dans l'intégrale de droite.

4 Cas des fonctions continues

a Intégrale et primitive

I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points.

Théorème 4 : Théorème fondamental de l'analyse

*Si f est **continue** sur un intervalle I et $a \in I$, $F : x \mapsto \int_a^x f$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a.*

Corollaire 2

(i) *Toute fonction continue sur un intervalle possède des primitives.*

(ii) *Si $f \in \mathscr{C}(I, \mathbb{K})$, F primitive de f sur I, $a, b \in I$,*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \Big[F(t)\Big]_a^b = F(b) - F(a)$$

(iii) *Si f est de classe $\mathscr{C}^1([a,b])$,*

$$f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t$$

(iv) ***Inégalité des accroissements finis*** *: Si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$ et f' bornée par k, alors f est k-lipschitzienne sur $[a,b]$.*

Propriété 15 : Fonction intégrale dépendant de ses bornes

Soient I, J intervalles de $\mathbb{R}$, $u, v : I \to J$ dérivables, $f : J \to \mathbb{K}$ continue.

L'application $\varphi : \begin{array}{|ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t \end{array}$ est dérivable sur I et

Exercice 2 : CCINP 56

On considère la fonction H définie sur $]1, +\infty[$ par $H(x) = \int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$.

1. Montrer que H est $\mathscr{C}^1$ sur $]1, +\infty[$ et calculer sa dérivée.
2. Montrer que la fonction u définie par $u(x) = \frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}$ admet une limite finie en $x = 1$.
3. En utilisant la fonction u de la question 2, calculer la limite en 1^+ de la fonction H.

b Intégration par parties, changement de variable

Propriété 16 : Intégration par parties

Si u, v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, $a, b \in I$,

Remarque 8
En fait, u, v dérivables et u', v' continues par morceaux suffit.

Exemple 2
Équivalent de $f(x) = \int_1^x \mathrm{e}^t \ln t\,\mathrm{d}t$ en $+\infty$.

Propriété 17 : Changement de variables

Si I intervalle, $\varphi : [\alpha, \beta] \to I$ de classe $\mathscr{C}^1$, f continue sur I,

C Positivité améliorée

Théorème 5 : Positivité améliorée

Si

H1

H2

alors

C'est faux si f est seulement continue par morceaux.

En particulier, si $a < b$, et si

H1

H2

alors

Propriété 18 : Inégalité de Cauchy-Schwarz

Si $a < b$ et $f, g \in \mathscr{C}([a,b], \mathbb{R})$,

avec égalité si et seulement si

Remarque 9

Inégalité encore vraie pour les fonctions continues par morceaux, mais le cas d'égalité n'est plus valable.

5 Cas des fonctions paires, impaires, périodiques

Propriété 19 : Intégrales de fonctions paires, impaires, périodiques

- *Si f est une fonction paire et continue par morceaux sur I, $a \in I$, alors*
- *Si f est une fonction impaire et continue par morceaux sur I, $a \in I$, alors*
- *Si f est une fonction T-périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, alors*

IV Sommes de Riemann

Définition 10 : Sommes de Riemann

Soit $f \in \mathscr{C}_m([a,b])$, $\sigma = (a_0, \ldots, a_n)$ subdivision quelconque de $[a,b]$ et pour $k \in [\![0, n-1]\!]$, $\xi_k \in [a_k, a_{k+1}]$. On appelle **somme de Riemann associée à f, σ et $(\xi_k)_k$**

Théorème 6 : Convergence des sommes de Riemann

Soit $f \in \mathscr{C}_m([a,b])$.

(i) *$h(\sigma)$ désignant le pas de σ,*

(ii) *Si, de plus, f est K-lipschitzienne,*

Remarque 10

Les sommes de Riemann peuvent servir à approcher numériquement des intégrales : méthode des rectangles à gauche pour $\xi_k = a_k$, méthode des rectangles à droite pour $\xi_k = a_{k+1}$, méthode du point milieu pour $\xi_k = \dfrac{a_k + a_{k+1}}{2}$.

On obtient aussi, pour une fonction K-lipschitzienne, la convergence en h (mais on peut faire mieux pour le point milieu : h^2).

Corollaire 3 : Énoncé du programme

Si f est continue par morceaux sur $[a,b]$, $a<b$,

En particulier, si $a=0$ et $b=1$, $f \in \mathscr{C}_m([0,1])$,

Remarque 11

À cause du $\frac{1}{n}$, ajouter ou enlever un nombre fini de termes dans la somme ne change pas sa limite.

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0 \text{ ou } 1 \text{ ou } 25}^{n-1 \text{ ou } n-2 \text{ ou } n+12} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f.$$

Exemple 3

$$n\sum_{j=n}^{2n-1}\frac{1}{j^2} \to \frac{1}{2}.$$

V Calcul de primitives et d'intégrales

Réviser le chapitre de début d'année.

VI Formules de Taylor

Définition 11 : Développement et reste de Taylor

Si f est n fois dérivable en a, son **développement de Taylor** en a à l'ordre n est

et le **reste de Taylor** de f en a à l'ordre n est $R_n = f - T_n$ (tel que $f = T_n + R_n$).

On sait déjà que si f est polynomiale de degré d, pour tout $n \geqslant d+1$, $R_n \equiv 0$.

On va chercher à :

- exprimer **globalement** R_n : c'est la formule de Taylor avec reste intégral,
- majorer **globalement** R_n : c'est l'inégalité de Taylor-Lagrange,
- dominer **localement** R_n : c'est la formule de Taylor-Young.

1 Formule de Taylor avec reste intégral

Propriété 20 : Formule de Taylor avec reste intégral

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ telle que f ***est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$ sur*** *I, $a \in I$. Pour tout $x \in I$,*

ie

À connaître parfaitement !

2 Inégalité de Taylor-Lagrange

Propriété 21 : Inégalité de Taylor-Lagrange

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ telle que f ***est de classe*** *$\mathscr{C}^{n+1}$* ***sur*** *I, $a \in I$. Pour tout $x \in I$,*

À connaître parfaitement !
Mais c'est plus facile, il n'y a que du $n+1$.

Exercice 3 : Série exponentielle

En utilisant $f : t \in [0,1] \mapsto \mathrm{e}^{tz}$, montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$, $\mathrm{e}^z = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{z^k}{k!}$.

Exercice 4 : formule de Taylor-Lagrange

Si f est de classe $\mathscr{C}^{(n+1)}$ sur I, $a, b \in I$, on a $c \in]a,b[$ tel que

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(b-a)^{n+1}.$$

3 Formule de Taylor-Young

Propriété 22 : Formule de Taylor-Young

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ telle que f ***est de classe*** *$\mathscr{C}^n$* ***sur*** *I, $a \in I$.*

$$R_n(x) = \underset{x \to a}{\mathrm{o}}\left((x-a)^n\right)$$

ie

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \underset{x \to a}{\mathrm{o}}\left((x-a)^n\right).$$

Remarques 4

R 1 – En fait, f de classe $\mathscr{C}^{n-1}$ et n fois dérivable en a suffit.

R 2 – Si f est de classe $\mathscr{C}^{n+1}$, on a le résultat plus fort

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \underset{x \to a}{\mathcal{O}}\left((x-a)^{n+1}\right).$$