26

Intégration

$\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. a, b sont des réels tels que $a < b$.

I Continuité uniforme

Définition 1 : Uniforme continuité

Soit $f : I \to \mathbb{K}$. On dit que f est **uniformément continue** sur I si

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0,\ \forall x, y \in I,\ |x-y| \leqslant \eta \Longrightarrow |f(x)-f(y)| \leqslant \varepsilon$$

Propriété 1 : Uniformément continue $\not\Longleftarrow\Longrightarrow$ continue

Une fonction uniformément continue sur I est continue sur I.

Réciproque fausse.

Propriété 2 : Caractérisation séquentielle

f est uniformément continue sur I si et seulement si $\forall (x_n)_n, (y_n)_n \in I^{\mathbb{N}}$,

$$x_n - y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \Longrightarrow f(x_n) - f(y_n) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Propriété 3 : Stabilité

Une combinaison linéaire, une composée de fonctions uniformément continue l'est encore.

Théorème 1 : de Heine

Tout fonction continue sur un segment est uniformément continue sur ce segment.

Propriété 4 : Lipschitzienne $\not\Longleftarrow\Longrightarrow$ uniformément continue

Toute fonction lipschitzienne (ou plus généralement hölderienne) sur I est uniformément continue sur I.

La réciproque est fausse.

II Fonctions continues par morceaux

1 Subdivisions

Définition 2 : Subdivision

On appelle **subdivision** de $[a,b]$ toute famille finie $\sigma = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ telle que

$$a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$$

On appelle **pas de la subdivision** le réel $h(\sigma) = \max\limits_{0\leqslant k\leqslant n-1} (a_{k+1} - a_k)$.

Lorsque $a_{k+1} - a_k$ ne dépend pas de k, on parle de **subdivision régulière**. Alors $h(\sigma) = \dfrac{b-a}{n}$ et $\forall k \in [\![0,n]\!],\ \ a_k = a + k\dfrac{b-a}{n}$.

Une subdivision σ' de $[a,b]$ est dite **plus fine** que σ si **les** points de σ sont **des** points de σ' (σ' contient au moins tous les points de σ.)

2 Fonctions en escalier

Définition 3 : Fonctions en escalier

Une application $\varphi : [a,b] \to \mathbb{K}$ est dite **en escalier** si et seulement s'il existe une subdivision $\sigma = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ de $[a,b]$ telle que

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!],\ \ \varphi_{|]a_k, a_{k+1}[} \text{ est constante.}$$

On dit alors que σ est **adaptée** à φ.

On note $\mathscr{E}([a,b])$ l'ensemble des fonctions en escalier sur $[a,b]$.

Propriété 5 : L'algèbre des fonctions en escalier

$\mathscr{E}([a,b])$ est une $\mathbb{K}$-algèbre. En particulier, si $\varphi, \psi \in \mathscr{E}([a,b])$ et $\lambda \in \mathbb{K}$,

- $\varphi + \psi \in \mathscr{E}([a,b])$
- $\varphi \times \psi \in \mathscr{E}([a,b])$
- $\lambda\varphi \in \mathscr{E}([a,b])$

On a aussi $|\varphi| \in \mathscr{E}([a,b])$, et si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\inf(\varphi,\psi)$, $\sup(\varphi,\psi) \in \mathscr{E}([a,b])$.

3 Fonctions continues par morceaux

Définition 4 : Fonctions continues par morceaux

Une application $f : [a,b] \to \mathbb{K}$ est dite **continue par morceaux** si et seulement s'il existe une subdivision $\sigma = (a_0, a_1, \dots, a_n)$ de $[a,b]$ telle que

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!], \begin{cases} f_{|]a_k,a_{k+1}[} \text{ est continue.} \\ f \text{ admet des limites à droite} \\ \text{de } a_k \text{ et à gauche de } a_{k+1}. \end{cases}$$

c'est-à-dire

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!], \begin{cases} f_{|]a_k,a_{k+1}[} \text{ est continue.} \\ f_{|]a_k,a_{k+1}[} \text{ est prolongeable par} \\ \text{continuité à } [a_k, a_{k+1}]. \end{cases}$$

On dit alors que σ est **adaptée** à f.
On note $\mathscr{C}_m([a,b])$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur $[a,b]$.

Définition 5 : Extension à un intervalle quelconque

$f : I \to \mathbb{K}$ est dite continue par morceaux (sur I) si sa restriction à tout segment l'est.

Propriété 6 : Continue par morceaux sur un segment ⇒ bornée

Toute fonction continue par morceaux sur un segment est bornée (mais les bornes ne sont pas nécessairement atteintes.)

Propriété 7 : L'algèbre des fonctions continues par morceaux

$\mathscr{C}_m([a,b])$ est une $\mathbb{K}$-algèbre. En particulier, si $f, g \in \mathscr{C}_m([a,b])$ et $\lambda \in \mathbb{R}$,

- $f + g \in \mathscr{C}_m([a,b])$
- $f \times g \in \mathscr{C}_m([a,b])$
- $\lambda f \in \mathscr{C}_m([a,b])$

On a aussi $|\varphi| \in \mathscr{C}_m([a,b])$, et si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $\inf(\varphi,\psi)$, $\sup(\varphi,\psi) \in \mathscr{C}_m([a,b])$.

Théorème 2 : Approximation uniforme des fonctions continues par des fonctions en escalier

Soient $f \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $\varphi, \psi \in \mathscr{E}([a,b])$ telles que $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$ et $\psi - \varphi \leqslant \varepsilon$.

Théorème 3 : Approximations uniforme des fonctions CPM par des fonctions en escalier

Soient $f \in \mathscr{C}_m([a,b],\mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $\varphi, \psi \in \mathscr{E}([a,b])$ telles que $\varphi \leqslant f \leqslant \psi$ et $\psi - \varphi \leqslant \varepsilon$.

Corollaire 1 : Une version valable pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$

Soit $f \in \mathscr{C}_m([a,b],\mathbb{K})$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $\varphi \in \mathscr{E}([a,b])$ tel que $|f - \varphi| \leqslant \varepsilon$.

III Intégrale d'une fonction continue par morceaux sur un segment

1 Intégrale d'une fonction en escalier sur un segment

On définit l'intégrale d'une fonction en escalier comme la somme des aires algébriques des rectangles formés entre la courbe et l'axe des abscisses.

Définition 6 : Intégrale d'une fonction en escalier

Soit $\varphi \in \mathscr{E}([a,b])$, $\sigma = (a_0, \dots, a_n)$ subdivision adaptée à φ.
On définit **l'intégrale de φ sur $[a,b]$** par

$$I_\sigma(\varphi) = \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1} - a_k) y_k$$

où y_k est la valeur de φ sur $]a_k, a_{k+1}[$.

Propriété 8 : Indépendance de l'intégrale avec la subdivision

L'intégrale de $\varphi \in \mathscr{E}([a,b])$ sur $[a,b]$ ne dépend pas de la subdivision σ et est notée $\displaystyle\int_{[a,b]} \varphi$.

Propriété 9 : Croissance et linéarité de l'intégrale

Si $\varphi, \psi \in \mathscr{E}([a,b])$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}$,

Croissance *Si* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *et* $\varphi \leqslant \psi$,

$$\int_{[a,b]} \varphi \leqslant \int_{[a,b]} \psi.$$

Linéarité

$$\int_{[a,b]} (\varphi + \psi) = \int_{[a,b]} \varphi + \int_{[a,b]} \psi$$

et

$$\int_{[a,b]} (\lambda\varphi) = \lambda \int_{[a,b]} \varphi.$$

2 Extension aux fonctions continues par morceaux

a Cas réel

Propriété 10

Soit $f \in \mathscr{C}_m([a,b], \mathbb{R})$. *Les ensembles*

$$I^-(f) = \left\{ \int_{[a,b]} \varphi \; ; \; \varphi \in \mathscr{E}([a,b]), \varphi \leqslant f \right\}$$

et

$$I^+(f) = \left\{ \int_{[a,b]} \psi \; ; \; \psi \in \mathscr{E}([a,b]), \psi \geqslant f \right\}$$

admettent respectivement une borne supérieure et inférieure, égales.

Définition 7 : Intégrale d'une fonction réelle continue par morceaux

Soit $f \in \mathscr{C}_m([a,b], \mathbb{R})$. On définit

$$\int_{[a,b]} f = \sup_{\substack{\varphi \in \mathscr{E}([a,b]) \\ \varphi \leqslant f}} \left(\int_{[a,b]} \varphi \right) = \inf_{\substack{\psi \in \mathscr{E}([a,b]) \\ \psi \geqslant f}} \left(\int_{[a,b]} \psi \right).$$

b Cas complexe

Définition 8 : Intégrale d'une fonction complexe continue par morceaux

Soit $f \in \mathscr{C}_m([a,b], \mathbb{C})$. Alors $\mathfrak{Re}\, f, \mathfrak{Im}\, f \in \mathscr{C}_m([a,b], \mathbb{R})$ et on pose

$$\int_{[a,b]} f = \int_{[a,b]} \mathfrak{Re}\, f + \mathrm{i} \int_{[a,b]} \mathfrak{Im}\, f$$

3 Propriétés de l'intégrale

a Linéarité

Propriété 11 : Linéarité de l'intégrale

L'application $\left| \begin{array}{ccc} \mathscr{C}_m([a,b]) & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_{[a,b]} f \end{array} \right.$ *est une forme linéaire, c'est-à-dire que pour toutes* $f, g \in \mathscr{C}_m([a,b])$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}$,

$$\int_{[a,b]} (f+g) = \int_{[a,b]} f + \int_{[a,b]} g$$

et

$$\int_{[a,b]} (\lambda f) = \lambda \int_{[a,b]} f.$$

b Propriétés liées à l'ordre

Propriété 12 : Positivité, croissance, inégalité triangulaire

Soit $f, g \in \mathscr{C}_m([a,b])$.

Positivité *Si* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *et* $f \geqslant 0$, $\displaystyle\int_{[a,b]} f \geqslant 0$.

Réciproque fausse.

Croissance *Si* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *et* $f \leqslant g$, $\displaystyle\int_{[a,b]} f \leqslant \int_{[a,b]} g$.

Réciproque fausse.

Inégalité triangulaire *Si* $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$,

$$\left| \int_{[a,b]} f \right| \leqslant \int_{[a,b]} |f| \leqslant (b-a) \|f\|_\infty$$

où $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$.

Définition 9 : Valeur moyenne

Soit f une fonction continue par morceau sur le segment $[a,b]$ où $a < b$.

On appelle **valeur moyenne** de f le nombre $\displaystyle\frac{1}{b-a} \int_{[a,b]} f$.

c Propriétés liées à l'intervalle

Propriété 13 : Relation de Chasles

Si $a<b<c$, $f\in\mathscr{C}_m([a,c])$, alors $f_{|[a,b]}\in\mathscr{C}_m([a,b])$ et $f_{|[b,c]}\in\mathscr{C}_m([b,c])$ et

$$\int_{[a,c]} f=\int_{[a,b]} f+\int_{[b,c]} f$$

(*abus de notation*)

Notation 1

Pour $f\in\mathscr{C}_m([a,b])$, on note

$$\int_a^b f=\int_{[a,b]} f,$$

$$\int_b^a f=-\int_a^b f=-\int_{[a,b]} f,$$

$$\int_a^a f=0.$$

On note aussi $\displaystyle\int_a^b f=\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Propriété 14 : de l'intégrale avec la nouvelle notation

Si I intervalle, $a,b\in I$ (non nécessairement ordonnés).

(i) $\left|\begin{array}{ccc}\mathscr{C}_m(I) & \longrightarrow & \mathbb{K}\\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_a^b f\end{array}\right.$ *est linéaire.*

(ii) *Dans le cas où $\mathbb{K}=\mathbb{R}$. On suppose que $f\leqslant g$.*

$$\text{Si } a\leqslant b,\quad \int_a^b f\leqslant\int_a^b g.$$

$$\text{Si } b\leqslant a,\quad \int_a^b f\geqslant\int_a^b g.$$

(iii) ⚠ *En général, si $a,b\in I$ et $f\in\mathscr{C}_m(I)$,*

$$\left|\int_a^b f\right|\leqslant\left|\int_a^b |f|\right|$$

(iv) *Si $a,b,c\in I$ et $f\in\mathscr{C}_m(I)$, $\displaystyle\int_a^c f=\int_a^b f+\int_b^c f$.*

4 Cas des fonctions continues

a Intégrale et primitive

I désigne un intervalle de $\mathbb{R}$ contenant au moins deux points.

Théorème 4 : Théorème fondamental de l'analyse

Si f est ***continue*** *sur un intervalle I et $a\in I$, $F:x\mapsto\displaystyle\int_a^x f$ est l'unique primitive de f qui s'annule en a.*

Corollaire 2

(i) *Toute fonction continue sur un intervalle possède des primitives.*

(ii) *Si $f\in\mathscr{C}(I,\mathbb{K})$, F primitive de f sur I, $a,b\in I$,*

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t=\Big[F(t)\Big]_a^b=F(b)-F(a)$$

(iii) *Si f est de classe $\mathscr{C}^1([a,b])$,*

$$f(x)=f(a)+\int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t$$

(iv) ***Inégalité des accroissements finis*** *: Si f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[a,b]$ et f' bornée par k, alors f est k-lipschitzienne sur $[a,b]$.*

Propriété 15 : Fonction intégrale dépendant de ses bornes

Soient I,J intervalles de $\mathbb{R}$, $u,v:I\to J$ dérivables, $f:J\to\mathbb{K}$ continue.

L'application $\varphi:\left|\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{K}\\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t\end{array}\right.$ est dérivable sur I et

$$\forall x\in I,\quad \varphi'(x)=v'(x)f(v(x))-u'(x)f(u(x)).$$

b Intégration par parties, changement de variable

Propriété 16 : Intégration par parties

Si u,v sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur I, $a,b\in I$,

$$\int_a^b u(t)v'(t)\,\mathrm{d}t=[u(t)v(t)]_a^b-\int_a^b u'(t)v(t)\,\mathrm{d}t$$

Propriété 17 : Changement de variables

Si I intervalle, $\varphi : [\alpha,\beta] \to I$ de classe $\mathscr{C}^1$, f continue sur I,

$$\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u.$$

c Positivité améliorée

Théorème 5 : Positivité améliorée

Si

- **H1** *f est **continue** sur $[a,b]$;*
- **H2** *f **de signe constant** sur ce même segment*

alors

$$\int_a^b f = 0 \Longleftrightarrow f \equiv 0 \text{ sur } [a,b]$$

C'est faux si f est seulement continue par morceaux.

En particulier, si $a < b$, et si

- **H1** *f **continue** sur $[a,b]$*
- **H2** *$f > 0$ sur $[a,b]$*

alors $\displaystyle\int_a^b f > 0$.

Propriété 18 : Inégalité de Cauchy-Schwarz

Si $a < b$ et $f, g \in \mathscr{C}([a,b],\mathbb{R})$,

$$\left(\int_a^b fg\right)^2 \leqslant \int_a^b f^2 \int_a^b g^2$$

avec égalité si et seulement si (f,g) est liée.

5 Cas des fonctions paires, impaires, périodiques

Propriété 19 : Intégrales de fonctions paires, impaires, périodiques

- *Si f est une fonction paire et continue par morceaux sur I, $a \in I$, alors $\displaystyle\int_{-a}^a f = 2\int_0^a f$.*
- *Si f est une fonction impaire et continue par morceaux sur I, $a \in I$, alors $\displaystyle\int_{-a}^a f = 0$.*
- *Si f est une fonction T-périodique et continue par morceaux sur $\mathbb{R}$, $a \in \mathbb{R}$, alors $\displaystyle\int_a^{a+T} f = \int_0^T f$.*

IV Sommes de Riemann

Définition 10 : Sommes de Riemann

Soit $f \in \mathscr{C}_m([a,b])$, $\sigma = (a_0,\dots,a_n)$ subdivision quelconque de $[a,b]$ et pour $k \in [\![0,n-1]\!]$, $\xi_k \in [a_k,a_{k+1}]$. On appelle **somme de Riemann associée à f, σ et $(\xi_k)_k$**

$$S(f,\sigma,\xi) = \sum_{k=0}^{n-1} (a_{k+1}-a_k) f(\xi_k)$$

Théorème 6 : Convergence des sommes de Riemann

Soit $f \in \mathscr{C}_m([a,b])$.

(i) $h(\sigma)$ désignant le pas de σ,

$$S(f,\sigma,\xi) \xrightarrow[h(\sigma)\to 0]{} \int_a^b f.$$

(ii) Si, de plus, f est K-lipschitzienne,

$$\left|S(f,\sigma,\xi) - \int_a^b f\right| \leqslant K(b-a)h(\sigma).$$

Corollaire 3 : Énoncé du programme

Si f est continue par morceaux sur $[a,b]$, $a < b$,

$$\frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_a^b f.$$

En particulier, si $a = 0$ et $b = 1$, $f \in \mathscr{C}_m([0,1])$,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f.$$

V Formules de Taylor

Définition 11 : Développement et reste de Taylor

Si f est n fois dérivable en a, son **développement de Taylor** en a à l'ordre n est

$$T_n(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

et le **reste de Taylor** de f en a à l'ordre n est $R_n = f - T_n$ (tel que $f = T_n + R_n$).

1 Formule de Taylor avec reste intégral

Propriété 20 : Formule de Taylor avec reste intégral

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ telle que f ***est de classe*** $\mathscr{C}^{n+1}$ ***sur*** I, $a \in I$. *Pour tout* $x \in I$,

$$R_n(x) = \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t$$

ie

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

2 Inégalité de Taylor-Lagrange

Propriété 21 : Inégalité de Taylor-Lagrange

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ telle que f ***est de classe*** $\mathscr{C}^{n+1}$ ***sur*** I, $a \in I$. *Pour tout* $x \in I$,

$$|R_n(x)| = \left| f(x) - \left(f(a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \right) \right| \leqslant \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} \sup_{t \in [a,x]} \left| f^{(n+1)}(t) \right|.$$

3 Formule de Taylor-Young

Propriété 22 : Formule de Taylor-Young

Soit $f : I \to \mathbb{K}$ telle que f ***est de classe*** $\mathscr{C}^{n}$ ***sur*** I, $a \in I$.

$$R_n(x) = \underset{x \to a}{\mathrm{o}}\left((x-a)^n\right)$$

ie

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \underset{x \to a}{\mathrm{o}}\left((x-a)^n\right).$$