27

Déterminant

I Applications multilinéaires

1 Définition

Définition 1 : Application n-linéaire

Soit $\mathbb{K}$ corps commutatif, $n \in \mathbb{N}^*$, E, F des $\mathbb{K}$-espaces vectoriels.

Une application $f : E^n \to F$ est dite **n-linéaire** lorsque pour tout $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \in E^n$, et tout $i \in [\![1, n]\!]$,

$$f_i : \left| \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ \vec{x} & \longmapsto & f(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{i-1}, \vec{x}, \vec{x}_{i+1}, \dots, \vec{x}_n) \end{array} \right.$$

est linéaire. (Linéarité par rapport à la i^e variable.) c'est-à-dire $\forall (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \in E^n, \ \forall i \in [\![1, n]\!], \ \forall \vec{x}, \vec{y} \in E, \ \forall \lambda \in \mathbb{K}$,

$$\begin{aligned} f(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{i-1}, \vec{x} + \lambda \vec{y}, \vec{x}_{i+1}, \dots, \vec{x}_n) \\ = f(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{i-1}, \vec{x}, \vec{x}_{i+1}, \dots, \vec{x}_n) \\ + \lambda f(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{i-1}, \vec{y}, \vec{x}_{i+1}, \dots, \vec{x}_n) \end{aligned}$$

On note $\mathscr{L}_n(E, F)$ l'ensemble des formes n-linéaires.

Lorsque $F = \mathbb{K}$, on parle de **forme n-linéaire**.

Remarque

R 1 – Une application n-linéaire se développe comme un produit : par exemple, si f est bilinéaire,

$f\left(\alpha \vec{x} + \beta \vec{x}', \gamma \vec{y} + \delta \vec{y}'\right) =$

R 2 – $\mathscr{L}_n(E, F) \neq \mathscr{L}(E^n, F)$! Si, par exemple, $n = 2$ et f bilinéaire alors :

$f(\vec{x} + \lambda \vec{x}', \vec{y} + \lambda \vec{y}') =$

tandis que si f est linéaire,

$f(\vec{x} + \lambda \vec{x}', \vec{y} + \lambda \vec{y}') =$

Exemple

E 1 – L'application nulle est n-linéaire.

E 2 – Le produit $(x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1 \times \dots \times x_n$ sur $\mathbb{K}^n$, sur $\mathscr{M}_p(\mathbb{K})$, est n-linéaire.

E 3 – $\left| \begin{array}{ccc} (\mathscr{L}(E))^2 & \longrightarrow & \mathscr{L}(E) \\ (u, v) & \longmapsto & u \circ v \end{array} \right.$ est bilinéaire.

E 4 – Le produit scalaire usuel $(\vec{x}, \vec{y}) \mapsto x_1 y_1 + x_2 y_2$ est une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}^2$.

E 5 – $(f, g) \mapsto \displaystyle\int_a^b f(t) g(t) \, \mathrm{d}t$ est une forme bilinéaire sur $\mathscr{C}([a, b])$.

Remarque

R 3 – Si E est de dimension finie n, f est n-linéaire sur E, $\mathscr{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ une base de E, et si on note $(x_{1,j}, \dots, x_{n,j})$ les coordonnées de $\vec{x}_j \in E$ dans la base $\mathscr{B}$, donc $\vec{x}_j = \sum_{i=1}^{n} x_{i,j} \vec{e}_i$, alors

$f(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) =$

2 Propriétés

Propriété 1 : Espace vectoriel de applications n-linéaires

(i) Si $f \in \mathscr{L}_n(E, F)$ et si l'un des $\vec{x}_i$ est nul, $f(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) = \vec{0}_F$.

(ii) $\mathscr{L}_n(E, F)$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

3 Formes n-linéaires symétriques, antisymétriques, alternées

E désigne un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et $n \in \mathbb{N}^*$.

Définition 2 : Symétrie, antisymétrie et caractère alterné

Soit $f \in \mathscr{L}_n(E,\mathbb{K})$.

- f est dite **symétrique** si et seulement si $\forall (\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n) \in E^n, \quad \forall i \neq j,$
- f est dite **antisymétrique** si et seulement si $\forall (\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n) \in E^n, \quad \forall i \neq j,$
- f est dite **alternée** si et seulement si $\forall (\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n) \in E^n, \quad \forall i \neq j,$

Exemple

E6 – $f : \begin{vmatrix} (\mathbb{R}^2)^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (\vec{x},\vec{y}) & \longmapsto & x_1y_2 - x_2y_1 \end{vmatrix}$

E7 – $f : \begin{vmatrix} (\mathbb{R}^2)^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (\vec{x},\vec{y}) & \longmapsto & x_1x_2 + y_1y_2 \end{vmatrix}$

Propriété 2 : Caractérisations

Soit $f \in \mathscr{L}_n(E,\mathbb{K})$.

(i) *f est symétrique si et seulement si* $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n, \quad \forall (\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n) \in E^n,$

(ii) *f est antisymétrique si et seulement si* $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n, \quad \forall (\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n) \in E^n,$

(iii) *f est alternée si et seulement si* $\forall (\vec{x}_1,\dots,\vec{x}_n) \in E^n,$

Propriété 3 : Alternée $\Longleftrightarrow$ antisymétrique

Soit $f \in \mathscr{L}_n(E,\mathbb{K})$. Si f est alternée, alors f est antisymétrique.

La réciproque est vraie si $\mathbb{K}$ n'est pas de caractéristique 2, c'est-à-dire si $2_{\mathbb{K}} \neq 0_{\mathbb{K}}$.

4 L'espace $\Lambda_n(E)$

Ici, E désignera un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, $n = \dim E \in \mathbb{N}^*$ avec $\mathbb{K}$ commutatif qui n'est pas de caractéristique 2.

Notation 1 : (maison)

On note $\Lambda_n(E)$ l'ensemble des formes n-linéaires alternées sur E.

Théorème 1 : fondamental de la théorie du déterminant

Si $n = \dim E$, l'ensemble $\Lambda_n(E)$ des formes n-linéaires alternées sur E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension 1.

Remarque

R4 – Deux formes n-linéaires alternées sur E sont donc toujours proportionnelles.

II Déterminant d'une famille de vecteurs

1 Définition

Lemme 1

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, $\mathscr{B}$ une base de E. Il existe une unique forme n-linéaire alternée sur E dont l'image de $\mathscr{B}$ est égale à 1.

Définition 3 : déterminant dans la base $\mathscr{B}$

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, $\mathscr{B} = (\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_n)$ une base de E.

On appelle **déterminant dans la base $\mathscr{B}$** l'unique forme n-linéaire alternée sur E notée $\det_{\mathscr{B}}$ telle que $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}) = 1$.

Si pour $1 \leqslant j \leqslant n$, $\vec{x}_j \in E$ de coordonnées $(x_{1,j}, \dots, x_{n,j})$ dans $\mathscr{B}$, alors

$\det_{\mathscr{B}}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) =$

On note $\det_{\mathscr{B}}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) = \begin{vmatrix} x_{1,1} & \dots & x_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n,1} & \dots & x_{n,n} \end{vmatrix}$.

Remarque

R 5 – On place dans les colonnes les coordonnées dans $\mathscr{B}$ des vecteurs de $\mathscr{F}$:

$$\det_{\mathscr{B}}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) = \begin{array}{c} \begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \dots & \vdots \end{vmatrix} \\ \uparrow \quad \uparrow \qquad \uparrow \\ \vec{x}_1 \quad \vec{x}_2 \ \dots \ \vec{x}_n \end{array} \begin{array}{l} \leftarrow \text{ selon } \vec{e}_1 \\ \leftarrow \text{ selon } \vec{e}_2 \\ \vdots \\ \leftarrow \text{ selon } \vec{e}_n \end{array}$$

R 6 – Un déterminant est nécessairement carré.

R 7 – $\forall f \in \Lambda_n(E),\ \exists \lambda,\ f = \lambda \det_{\mathscr{B}}$.
De plus, $\lambda = f(\mathscr{B})$.

R 8 – Par définition, le déterminant est n-linéaire alterné. En particulier, le déterminant d'une famille liée est nul.

R 9 – Interprétation géométrique du déterminant : on peut démontrer que

- si $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^2$, $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^2$, alors $\det_{\mathscr{B}}(\vec{u}, \vec{v})$ est l'aire orientée du parallélogramme construit sur $\vec{u}$ et $\vec{v}$;
- si $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in \mathbb{R}^2$, $\mathscr{B}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$, alors $\det_{\mathscr{B}}(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est le volume orienté du parallélogramme construit sur $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$.

Exemple

E 8 – Si $n = 2$, on trouve $\det_{\mathscr{B}}(\vec{x}_1, \vec{x}_2) =$

E 9 – Si $n = 3$, la formule s'appelle **règle de Sarrus**. Elle est facile à retenir, mais l'usage en est proscrit : un déterminant, ça se **factorise** (pour savoir si la famille est libre), c'est exactement l'inverse de ce que fait cette formule.

2 Propriétés

Propriété 4 : du déterminant d'une famille de vecteurs

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n, $\mathscr{B}, \mathscr{B}'$ des bases de E.

(i) ***Formule de changement de base*** :

(ii) $\det_{\mathscr{B}}(\mathscr{B}') \neq 0$ *et* $\det_{\mathscr{B}'}(\mathscr{B}) =$

(iii) $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ *est libre/une base de E si et seulement si*

Remarque

R 10 – Dans le plan, le déterminant permet de caractériser la **colinéarité**.
Par exemple, une droite passant par $\mathrm{A}(x_0, y_0)$ et dirigée par $\vec{u}(\alpha, \beta)$ a pour équation $\begin{vmatrix} x - x_0 & \alpha \\ y - y_0 & \beta \end{vmatrix} = 0$.

R 11 – Dans l'espace, le déterminant permet de caractériser la **coplanérité**.
Par exemple, un plan passant par $\mathrm{A}(x_0, y_0, z_0)$ et dirigée par $\vec{u}(\alpha, \beta, \gamma)$ et $\vec{v}(\alpha', \beta', \gamma')$ a pour équation $\begin{vmatrix} x - x_0 & \alpha & \alpha' \\ y - y_0 & \beta & \beta' \\ z - z_0 & \gamma & \gamma' \end{vmatrix} = 0$.

III DÉTERMINANT D'UN ENDOMORPHISME

On fixe E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $\mathscr{B}$ une base de E.

1 Définition

Lemme 2

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. Alors $\det_{\mathscr{B}}(u(\mathscr{B}))$ ne dépend pas de $\mathscr{B}$.

Définition 4 : Déterminant d'un endomorphisme

Soit $u \in \mathscr{L}(E)$. On appelle **déterminant** de u le scalaire $\det u = \det_{\mathscr{B}}(u(\mathscr{B}))$ où $\mathscr{B}$ est une base quelconque de E. Si $\mathscr{B} = (\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_n)$,

$$\det u =$$

2 Propriétés

Propriété 5 : du déterminant d'un endomorphisme

(i) *Si* $u \in \mathscr{L}(E)$, $\forall (\vec{x}_1, \ldots, \vec{x}_n) \in E$,

$$\det_{\mathscr{B}}(u(\vec{x}_1), \ldots, u(\vec{x}_n)) =$$

(ii) $\det(\mathrm{id}_E) =$

(iii) $\forall u, v \in \mathscr{L}(E), \;, \det(u \circ v) =$

(iv) ⚠ $\forall u \in \mathscr{L}(E),\ \forall \lambda \in \mathbb{K},\ \det(\lambda u) =$

(v) *Soit* $u \in \mathscr{L}(E)$. $u \in \mathscr{GL}(E) \Longleftrightarrow$

(vi) $\det : (\mathscr{GL}(E), \circ) \to (\mathbb{K}^*, \times)$ *est un morphisme de groupes.*

(vii) *Si* $u \in \mathscr{GL}(E)$, $\det\left(u^{-1}\right) =$

Remarque

R 12 – ⚠ $\det$ n'est pas linéaire : $\det(u+v) \neq \det u + \det v$ en général. Exemple : $\pm \mathrm{id}_E$ en dimension impaire.

R 13 – Le noyau du du morphisme de groupes $\det : (\mathscr{GL}(E), \circ) \to (\mathbb{K}^*, \times)$ est appelé **groupe spécial linéaire** de E :

$$\mathscr{SL}(E) = \{u \in \mathscr{L}(E),\ \det u = 1\},$$

sous-groupe de $(\mathscr{GL}(E), \circ)$.

IV Déterminant d'une matrice carrée

1 Définition

On fixe $n \in \mathbb{N}^*$.

Définition 5 : déterminant d'une matrice carrée

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $A = (a_{i,j})_{i,j \in \mathbb{N}_n}$. On définit le **déterminant** de A par

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \ldots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \ldots & a_{n,n} \end{vmatrix} =$$

Remarque

R 14 – Dans chaque terme de la somme, on choisit exactement un terme par colonne et par ligne.

2 Propriétés

Propriété 6 : du déterminant d'une matrice carrée

(i) *Si* $C_1, \ldots, C_n$ *sont les vecteurs colonnes de* A *et* $\mathscr{B}$ *la base canonique de* $\mathscr{M}_{n,1}(K)$, $\det A = \det_{\mathscr{B}}(C_1, \ldots, C_n)$.

(ii) *Soit* E *un* $\mathbb{K}$*-espace vectoriel de dimension finie* n, $u \in \mathscr{L}(E)$ *représenté par* A *dans une base de* E, *alors* $\det A = \det u$.

(iii) $\det I_n =$

(iv) *Si* $A, B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $\det AB =$

(v) ⚠ *Si* $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ *et* $\lambda \in \mathbb{K}$, $\det(\lambda A) =$

(vi) $\det A^\intercal =$

(vii) $\mathscr{GL}_n(\mathbb{K}) = \{A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \mid \det A \neq 0\}$.

(viii) $\det : (\mathscr{GL}_n(\mathbb{K}), \times) \to (\mathbb{K}^*, \times)$ *est un morphisme de groupes.*

(ix) *Si* A *est inversible,* $\det\left(A^{-1}\right) =$

(x) *Des matrices semblables ont même déterminant : le déterminant est un invariant de similitude.*

Remarque

R 15 – ⚠ $\det(A+B) \neq \det A + \det B$ en général : $\det$ n'est pas linéaire.

R 16 – Le noyau du du morphisme de groupes $\det : (\mathscr{GL}_n(\mathbb{K}), \times) \to (\mathbb{K}^*, \times)$ est appelé **groupe spécial linéaire** d'ordre n :

$$\mathscr{SL}_n(\mathbb{K}) = \{A \in \mathscr{M}_n(K),\ \det A = 1\},$$

sous-groupe de $(\mathscr{GL}_n(\mathbb{K}), \times)$.

V CALCULS DE DÉTERMINANTS

1 Opérations élémentaires

Propriété 7 : déterminant et opération élémentaire

(i) *Si une ligne ou une colonne est nulle, ou une combinaison linéaire des autres, le déterminant est nul.*

(ii) *On ne change pas le déterminant avec les opérations*

$$L_i \leftarrow L_i + \sum_{k\neq i} \lambda_k L_k \quad \text{ou} \quad C_j \leftarrow C_j + \sum_{k\neq i} \lambda_k C_k$$

(transvections successives.)

(iii) ⚠ *En multipliant par λ une ligne ou une colonne, on multiplie par λ le déterminant.*

(iv) *Si on échange deux lignes ou deux colonnes, on multiplie le déterminant par -1.*

Plus généralement, si on permute les lignes ou les colonnes avec une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on multiplie le déterminant par $\varepsilon(\sigma)$.

(v) $$\begin{vmatrix} d_1 & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & d_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (*) & & d_n \end{vmatrix} = d_1 \times \cdots \times d_n.$$

Remarque

R 17 – ⚠ Pas d'opération du type $L_i \leftarrow \lambda L_i + \mu L_j$ car cela modifie le déterminant.

R 18 – On retrouve très facilement le critère d'inversibilité des matrices triangulaires.

Exercice 1

Si $(a,b)\in\mathbb{K}^2$ et $n \geqslant 2$, calculer $\begin{vmatrix} a & & (b) \\ & \ddots & \\ (b) & & a \end{vmatrix}_n$.

Exercice 2

Factoriser $\Delta = \begin{vmatrix} 2b & b-a-c & 2b \\ a-b-c & 2a & 2a \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$.

2 Développements

a Mineurs et cofacteurs

Définition 6 : Mineurs, cofacteurs, comatrice

Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, $i,j \in [\![1,n]\!]$.

- On appelle **mineur** d'indice (i,j) le déterminant $\Delta_{i,j}$ obtenu en retirant L_i et C_j à A.
- On appelle **cofacteur** d'indice (i,j) le nombre $C_{i,j} = (-1)^{i+j}\Delta_{i,j}$.
- On appelle **comatrice** de A la matrice de ses cofacteurs :

$$\tilde{A} = \mathrm{Com}\, A = (C_{i,j})_{i,j} = \left((-1)^{i+j}\Delta_{i,j}\right)_{i,j}.$$

Exemple

E 10 – Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$, alors $\mathrm{Com}\, A =$

Pour les signes à mettre devant les cofacteurs, c'est facile : ils sont alternés, et + sur la diagonale. Ici : $\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$.

b Développement par rapport à une ligne ou une colonne

Propriété 8 : Développements d'un déterminant

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

(i) ***Développement par rapport à** L_i : Si $i \in [\![1,n]\!]$,*

(ii) ***Développement par rapport à*** C_j : *Si* $j \in [\![1, n]\!]$,

Exemple

E 11 – Avec la matrice précédente :

- Développement par rapport à L_1 : $\det A =$
- Développement par rapport à C_2 : $\det A =$

Remarque

R 19 – Plus il y a de zéros dans la ligne/colonne par rapport à laquelle on développe, plus c'est intéressant !

Exercice 3

Calculer $D_n = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & \cdots & 1 \\ -1 & \ddots & & (0) \\ & \ddots & \ddots & \\ (0) & & -1 & 1 \end{vmatrix}_n$.

Remarque

R 20 – On retrouve facilement, par récurrence, en faisant des développements par rapport à la dernière ligne,

$$\begin{vmatrix} d_1 & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & d_n \end{vmatrix} = d_n \begin{vmatrix} d_1 & & (*) \\ & \ddots & \\ (0) & & d_{n-1} \end{vmatrix} = \cdots = d_1 \times \cdots \times d_n.$$

3 Déterminants par blocs

Propriété 9 : Déterminant de matrice triangulaire par blocs

Soient $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ *et* $B \in \mathscr{M}_p(\mathbb{K})$, *alors*

$$\begin{vmatrix} A & (*) \\ (0) & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & (0) \\ (*) & B \end{vmatrix} = \det A \cdot \det B.$$

Remarque

R 21 – ⚠ même lorsque toutes les matrices sont carrées, $\begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} \neq \det A \det D - \det B \det C$ ou autre $\det(AD - BC)$ en général ! (cf TD)

4 Déterminants de Vandermonde

Propriété 10 : Déterminant de Vandermonde

Soient $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{K}$,

$V(x_1, \ldots, x_n) =$

Remarque

R 22 – $V(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$ si et seulement si les x_i sont deux à deux distincts.

Exercice 4

Calculer le rang de $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & 8 & 9 & 4 \\ 1 & 131 & 132 & 8 \end{pmatrix}$.

Remarque : Interpolation de Lagrange

R 23 – On cherche un polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, $P(x_i) = y_i$, les x_i étant deux à deux distincts.

Si l'on écrit $P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$, cela revient à résoudre un système de matrice

$\begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{pmatrix}$ qui a bien une et une seule solution.

Il s'agit d'ailleurs de la matrice représentant dans les bases canoniques l'endomorphisme $P \mapsto (P(x_0), \dots, P(x_n))$.

VI Applications des déterminants

1 Formule de la comatrice

Propriété 11 : Formule de la comatrice

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. Alors

Si, de plus, A est inversible, alors $A^{-1} =$

Exemple

E 12 – Si $n = 2$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\mathrm{Com}\, A =$ et si A est inversible $A^{-1} =$

Remarque

R 24 – Intérêt théorique, et pratique seulement si $n = 2$ ou 3.

2 Polynôme caractéristique (Spé)

On rappelle que $\lambda \in \mathbb{K}$ est **valeur propre** de $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

- si et seulement s'il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ **non nul** tel que $AX = \lambda X$,
- si et seulement s'il existe $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ **non nul** tel que $(A - \lambda I_n)X = 0$,
- si et seulement si $\mathrm{Ker}(A - \lambda I_n) \neq \{0\}$,
- si et seulement si $A - \lambda I_n$ n'est pas inversible,
- si et seulement si $\det(\lambda I_n - A) \neq 0$.

Définition 7 : Polynôme caractéristique

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. On appelle **polynôme caractéristique** de A le polynôme $\chi_A \in \mathbb{K}[X]$ tel que pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\chi_A(\lambda) =$

Alors $\mathrm{Sp}(A)$ (ensemble des valeurs propres) est exactement l'ensemble des racines de χ_A.

On définit de même $\chi_u \in \mathbb{K}[X]$ tel que pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $\chi_u(\lambda) =$ pour $u \in \mathcal{L}(E)$ polynôme caractéristique de u qui est le polynôme caractéristique de n'importe quelle matrice représentant u.

Propriété 12 : Cœfficients du polynôme caractéristique

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$. χ_A est de degré n, unitaire, de terme constant $(-1)^n \det A$ et de cœfficient en X^{n-1} égal à $-\mathrm{tr}\, A$.

Remarque

R 25 – Si χ_A est **scindé**, la somme et le produit des valeurs propres (comptées avec multiplicité) valent respectivement $\mathrm{tr}\, A$ et $\det A$ d'après les relation cœfficients-racines. Ce qui est évident si A est diagonalisable, n'est-ce pas ? (tr et $\det$ sont des invariants de similitude, χ en est aussi un !)

R 26 – Si $n = 2$, $\chi_A =$

Exercice 5

Diagonaliser $A = \begin{pmatrix} 5 & 1 & -1 \\ 2 & 4 & -2 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$.

Remarque

R 27 – A propos d'équation caractéristique ?

EDL$_2$:

$$f'' = af' + bf$$

se réécrit $Y' = \begin{pmatrix} f \\ f' \end{pmatrix}' = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} f \\ f' \end{pmatrix} = AY.$

Suites récurrentes d'ordre 2 :

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$$

se réécrit $X_{n+1} = \begin{pmatrix} u_{n+1} \\ u_{n+2} \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b & a \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} u_n \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = AX_n.$

On calcule $\chi_A = X^2 - aX - b$: équation/polynôme caractéristique.

Dans tous les cas, même si A n'est pas diagonalisable, on peut se placer dans $\mathbb{C}$ (il y a deux valeurs propres avec multiplicité) et compléter un vecteur propre en une base de $\mathbb{C}^2$, écrire $A = P\begin{pmatrix} \lambda_1 & * \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}P^{-1}$ et retrouver les résultats connus.

R 28 – Le théorème de Cayley-Hamilton (au programme de Spé) dit que χ_A est un polynôme annulateur de A : $\chi_A(A) = 0_n$.
Par exemple, toute matrice de $\mathcal{M}_2(\mathbb{K})$ vérifie $A^2 - (\operatorname{tr} A)A + (\det A)I_2 = 0_2$.

Exercice 6 : CCINP 63

Soit un entier $n \geqslant 1$. On considère la matrice carrée d'ordre n à coefficients réels :

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \vdots \\ 0 & -1 & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 2 & -1 \\ 0 & \cdots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Pour $n \geqslant 1$, on désigne par D_n le déterminant de A_n.

1. **Démontrer que $D_{n+2} = 2D_{n+1} - D_n$.**
2. **Déterminer D_n en fonction de n.**
3. **~~Justifier que la matrice A_n est diagonalisable~~. Le réel 0 est-il valeur propre de A_n ?**