

## 1 APPLICATIONS MULTILINÉAIRES

### 1 Définition

#### Définition 1 : Application $n$ -linéaire

Soit  $\mathbb{K}$  corps commutatif,  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $E, F$  des  $\mathbb{K}$ -espaces vectoriels.

Une application  $f : E^n \rightarrow F$  est dite  **$n$ -linéaire** lorsque pour tout  $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \in E^n$ , et tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,

$$f_i : \begin{cases} E & \longrightarrow F \\ \vec{x} & \longmapsto f(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{i-1}, \vec{x}, \vec{x}_{i+1}, \dots, \vec{x}_n) \end{cases}$$

est linéaire. (Linéarité par rapport à la  $i^{\text{e}}$  variable.) c'est-à-dire  $\forall (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \in E^n$ ,  $\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\forall \vec{x}, \vec{y} \in E$ ,  $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ ,

$$\begin{aligned} f(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{i-1}, \vec{x} + \lambda \vec{y}, \vec{x}_{i+1}, \dots, \vec{x}_n) \\ = f(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{i-1}, \vec{x}, \vec{x}_{i+1}, \dots, \vec{x}_n) \\ + \lambda f(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{i-1}, \vec{y}, \vec{x}_{i+1}, \dots, \vec{x}_n) \end{aligned}$$

On note  $\mathcal{L}_n(E, F)$  l'ensemble des formes  $n$ -linéaires.

Lorsque  $F = \mathbb{K}$ , on parle de **forme  $n$ -linéaire**.

### 2 Propriétés

#### Propriété 1 : Espace vectoriel de applications $n$ -linéaires

- (i) Si  $f \in \mathcal{L}_n(E, F)$  et si l'un des  $\vec{x}_i$  est nul,  $f(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) = \vec{0}_F$ .
- (ii)  $\mathcal{L}_n(E, F)$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel.

### 3 Formes $n$ -linéaires symétriques, antisymétriques, alternées

$E$  désigne un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel, et  $n \in \mathbb{N}^*$ .

#### Définition 2 : Symétrie, antisymétrie et caractère alterné

Soit  $f \in \mathcal{L}_n(E, \mathbb{K})$ .

- $f$  est dite **symétrique** si et seulement si  $\forall (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \in E^n$ ,  $\forall i \neq j$ ,

$$\begin{aligned} f(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_i, \dots, \vec{x}_j, \dots, \vec{x}_n) \\ = f(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_j, \dots, \vec{x}_i, \dots, \vec{x}_n). \end{aligned}$$

- $f$  est dite **antisymétrique** si et seulement si  $\forall (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \in E^n$ ,  $\forall i \neq j$ ,

$$\begin{aligned} f(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_i, \dots, \vec{x}_j, \dots, \vec{x}_n) \\ = -f(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_j, \dots, \vec{x}_i, \dots, \vec{x}_n). \end{aligned}$$

- $f$  est dite **alternée** si et seulement si  $\forall (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \in E^n$ ,  $\forall i \neq j$ ,

$$f(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_i, \dots, \vec{x}_i, \dots, \vec{x}_n) = 0_{\mathbb{K}}.$$

#### Propriété 2 : Caractérisations

Soit  $f \in \mathcal{L}_n(E, \mathbb{K})$ .

- (i)  $f$  est symétrique si et seulement si  $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n$ ,  $\forall (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \in E^n$ ,

$$f(\vec{x}_{\sigma(1)}, \dots, \vec{x}_{\sigma(n)}) = f(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n).$$

- (ii)  $f$  est antisymétrique si et seulement si  $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_n$ ,  $\forall (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \in E^n$ ,

$$f(\vec{x}_{\sigma(1)}, \dots, \vec{x}_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma) f(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n).$$

- (iii)  $f$  est alternée si et seulement si  $\forall (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \in E^n$ ,

$$(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \text{ liée} \implies f(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) = 0_{\mathbb{K}}.$$

#### Propriété 3 : Alternée $\iff$ antisymétrique

Soit  $f \in \mathcal{L}_n(E, \mathbb{K})$ . Si  $f$  est alternée, alors  $f$  est antisymétrique.

La réciproque est vraie si  $\mathbb{K}$  n'est pas de caractéristique 2, c'est-à-dire si  $2_{\mathbb{K}} \neq 0_{\mathbb{K}}$ .

### 4 L'espace $\Lambda_n(E)$

Ici,  $E$  désignera un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie,  $n = \dim E \in \mathbb{N}^*$  avec  $\mathbb{K}$  commutatif qui n'est pas de caractéristique 2.

#### Notation 1 : (maison)

On note  $\Lambda_n(E)$  l'ensemble des formes  $n$ -linéaires alternées sur  $E$ .



**Théorème 1 : fondamental de la théorie du déterminant**

Si  $n = \dim E$ , l'ensemble  $\Lambda_n(E)$  des formes  $n$ -linéaires alternées sur  $E$  est un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension 1.

**III DÉTERMINANT D'UN ENDOMORPHISME**

On fixe  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$  et  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ .

**1 Définition**

**Lemme 2**

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Alors  $\det_{\mathcal{B}}(u(\mathcal{B}))$  ne dépend pas de  $\mathcal{B}$ .

**Définition 4 : Déterminant d'un endomorphisme**

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . On appelle **déterminant** de  $u$  le scalaire  $\det u = \det_{\mathcal{B}}(u(\mathcal{B}))$  où  $\mathcal{B}$  est une base quelconque de  $E$ . Si  $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ ,

$$\det u = \det_{(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)} (u(\vec{e}_1), \dots, u(\vec{e}_n)).$$

**2 Propriétés**

**Propriété 5 : du déterminant d'un endomorphisme**

- (i) Si  $u \in \mathcal{L}(E)$ ,  $\forall (\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \in E$ ,  
 $\det_{\mathcal{B}}(u(\vec{x}_1), \dots, u(\vec{x}_n)) = \det u \times \det_{\mathcal{B}}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$ .
- (ii)  $\det(\text{id}_E) = 1$ .
- (iii)  $\forall u, v \in \mathcal{L}(E)$ ,  $\det(u \circ v) = \det u \times \det v$ .
- (iv)  $\forall u \in \mathcal{L}(E)$ ,  $\forall \lambda \in \mathbb{K}$ ,  $\det(\lambda u) = \lambda^n \det u$ .
- (v) Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ .  $u \in \mathcal{GL}(E) \iff \det u \neq 0$ .
- (vi)  $\det : (\mathcal{GL}(E), \circ) \rightarrow (\mathbb{K}^*, \times)$  est un morphisme de groupes.
- (vii) Si  $u \in \mathcal{GL}(E)$ ,  $\det(u^{-1}) = (\det u)^{-1}$ .

**IV DÉTERMINANT D'UNE MATRICE CARRÉE**

**1 Définition**

On fixe  $n \in \mathbb{N}^*$ .

**Définition 5 : déterminant d'une matrice carrée**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ,  $A = (a_{i,j})_{i,j \in \mathbb{N}_n}$ . On définit le **dé-**

**II DÉTERMINANT D'UNE FAMILLE DE VECTEURS**

**1 Définition**

**Lemme 1**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$ ,  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ . Il existe une unique forme  $n$ -linéaire alternée sur  $E$  dont l'image de  $\mathcal{B}$  est égale à 1.

**Définition 3 : déterminant dans la base  $\mathcal{B}$**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$ ,  $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$  une base de  $E$ .

On appelle **déterminant dans la base  $\mathcal{B}$**  l'unique forme  $n$ -linéaire alternée sur  $E$  notée  $\det_{\mathcal{B}}$  telle que  $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}) = 1$ .

Si pour  $1 \leq j \leq n$ ,  $\vec{x}_j \in E$  de coordonnées  $(x_{1,j}, \dots, x_{n,j})$  dans  $\mathcal{B}$ , alors

$$\det_{\mathcal{B}}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1),1} \dots x_{\sigma(n),n}$$

On note  $\det_{\mathcal{B}}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) = \begin{vmatrix} x_{1,1} & \dots & x_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n,1} & \dots & x_{n,n} \end{vmatrix}$ .

**2 Propriétés**

**Propriété 4 : du déterminant d'une famille de vecteurs**

Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$ ,  $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$  des bases de  $E$ .

(i) **Formule de changement de base :**

$$\det_{\mathcal{B}'} = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}.$$

(ii)  $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \neq 0$  et  $\det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) = (\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}'))^{-1}$ .

(iii)  $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n)$  est libre / une base de  $E$  si et seulement si  $\det_{\mathcal{B}}(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_n) \neq 0_{\mathbb{K}}$ .

**terminant** de  $A$  par

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \dots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{\sigma(1),1} \dots a_{\sigma(n),n}.$$

Plus généralement, si on permute les lignes ou les colonnes avec une permutation  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ , on multiplie le déterminant par  $\varepsilon(\sigma)$ .

$$(v) \begin{vmatrix} d_1 & (*) \\ \vdots & \vdots \\ (0) & d_n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} d_1 & (0) \\ \vdots & \vdots \\ (*) & d_n \end{vmatrix} = d_1 \times \dots \times d_n.$$

## 2 Propriétés

**Propriété 6 : du déterminant d'une matrice carrée**

- (i) Si  $C_1, \dots, C_n$  sont les vecteurs colonnes de  $A$  et  $\mathcal{B}$  la base canonique de  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ ,  $\det A = \det_{\mathcal{B}}(C_1, \dots, C_n)$ .
- (ii) Soit  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie  $n$ ,  $u \in \mathcal{L}(E)$  représenté par  $A$  dans une base de  $E$ , alors  $\det A = \det u$ .
- (iii)  $\det I_n = 1$ .
- (iv) Si  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ,  $\det AB = \det A \det B$ .
- (v)  $\triangleleft$  Si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $\det(\lambda A) = \lambda^n \det A$ .
- (vi)  $\det A^T = \det A$  qui est donc aussi le déterminant de ses lignes dans la base canonique.
- (vii)  $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) = \{A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \mid \det A \neq 0\}$ .
- (viii)  $\det : (\mathcal{GL}_n(\mathbb{K}), \times) \rightarrow (\mathbb{K}^*, \times)$  est un morphisme de groupes.
- (ix) Si  $A$  est inversible,  $\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$ .
- (x) Des matrices semblables ont même déterminant : le déterminant est un invariant de similitude.

## 2 Développements

**a Mineurs et cofacteurs**

**Définition 6 : Mineurs, cofacteurs, comatrice**

- Soient  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ,  $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .
- On appelle **mineur** d'indice  $(i, j)$  le déterminant  $\Delta_{i,j}$  obtenu en retirant  $L_i$  et  $C_j$  à  $A$ .
  - On appelle **cofacteur** d'indice  $(i, j)$  le nombre  $C_{i,j} = (-1)^{i+j} \Delta_{i,j}$ .
  - On appelle **comatrice** de  $A$  la matrice de ses cofacteurs :

$$\tilde{A} = \text{Com } A = (C_{i,j})_{i,j} = \left( (-1)^{i+j} \Delta_{i,j} \right)_{i,j}.$$

**b Développement par rapport à une ligne ou une colonne**

**Propriété 8 : Développements d'un déterminant**

- Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .
- (i) **Développement par rapport à  $L_i$**  : Si  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} \Delta_{i,j} a_{i,j}.$$

- (ii) **Développement par rapport à  $C_j$**  : Si  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,

$$\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} \Delta_{i,j} a_{i,j}.$$

## 3 Déterminants par blocs

**Propriété 9 : Déterminant de matrice triangulaire par blocs**

Soient  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $B \in \mathcal{M}_p(\mathbb{K})$ , alors

$$\begin{vmatrix} A & (*) \\ (0) & B \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & (0) \\ (*) & B \end{vmatrix} = \det A \cdot \det B.$$

# V CALCULS DE DÉTERMINANTS

## 1 Opérations élémentaires

**Propriété 7 : déterminant et opération élémentaire**

- (i) Si une ligne ou une colonne est nulle, ou une combinaison linéaire des autres, le déterminant est nul.
- (ii) On ne change pas le déterminant avec les opérations

$$L_i \leftarrow L_i + \sum_{k \neq i} \lambda_k L_k \quad \text{ou} \quad C_j \leftarrow C_j + \sum_{k \neq j} \lambda_k C_k$$

(transvections successives.)

- (iii)  $\triangleleft$  En multipliant par  $\lambda$  une ligne ou une colonne, on multiplie par  $\lambda$  le déterminant.
- (iv) Si on échange deux lignes ou deux colonnes, on multiplie le déterminant par  $-1$ .



## 4 Déterminants de Vandermonde

### Propriété 10 : Déterminant de Vandermonde

Soient  $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ ,

$$\begin{aligned}
 V(x_1, \dots, x_n) &= \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \\
 &= \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} \\
 &= \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i).
 \end{aligned}$$

### Définition 7 : Polynôme caractéristique

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . On appelle **polynôme caractéristique** de  $A$  le polynôme  $\chi_A \in \mathbb{K}[X]$  tel que pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $\chi_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A)$ .

Alors  $\text{Sp}(A)$  (ensemble des valeurs propres) est exactement l'ensemble des racines de  $\chi_A$ .

On définit de même  $\chi_u \in \mathbb{K}[X]$  tel que pour tout  $\lambda \in \mathbb{K}$ ,  $\chi_u(\lambda) = \det(\lambda \text{id}_E - u)$  pour  $u \in \mathcal{L}(E)$  polynôme caractéristique de  $u$  qui est le polynôme caractéristique de n'importe quelle matrice représentant  $u$ .

### Propriété 12 : Coefficients du polynôme caractéristique

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ .  $\chi_A$  est de degré  $n$ , unitaire, de terme constant  $(-1)^n \det A$  et de coefficient en  $X^{n-1}$  égal à  $-\text{tr} A$ .

$$\chi_A = X^n - (\text{tr} A)X^{n-1} + \dots + (-1)^n \det A.$$

## VI APPLICATIONS DES DÉTERMINANTS

### 1 Formule de la comatrice

#### Propriété 11 : Formule de la comatrice

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ . Alors

$$A \times (\text{Com } A)^T = (\text{Com } A)^T \times A = \det(A) \cdot I_n.$$

Si, de plus,  $A$  est inversible, alors

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (\text{Com } A)^T.$$

### 2 Polynôme caractéristique (Spé)

On rappelle que  $\lambda \in \mathbb{K}$  est **valeur propre** de  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$

- si et seulement si il existe  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  **non nul** tel que  $AX = \lambda X$ ,
- si et seulement si il existe  $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  **non nul** tel que  $(A - \lambda I_n)X = 0$ ,
- si et seulement si  $\text{Ker}(A - \lambda I_n) \neq \{0\}$ ,
- si et seulement si  $A - \lambda I_n$  n'est pas inversible,
- si et seulement si  $\det(\lambda I_n - A) \neq 0$ .