

Programme de colle – MP2I

Applications linéaires

Reprise pour exercices.

Matrices d'applications linéaires

Extrait du programme officiel :

Matrices et applications linéaires

Contenus	Capacités & commentaires
a) Matrice d'une application linéaire dans des bases	
<p>Matrice d'un vecteur, d'une famille de vecteurs dans une base, d'une application linéaire dans un couple de bases, d'un endomorphisme dans une base.</p> <p>Isomorphisme d'espaces vectoriels de $\mathcal{L}(E, F)$ sur $\mathcal{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ induit par le choix d'un couple de bases.</p> <p>Isomorphisme d'espaces vectoriels et d'anneaux de $\mathcal{L}(E)$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ induit par le choix d'une base.</p> <p>Coordonnées de l'image d'un vecteur par une application linéaire.</p> <p>Matrice d'une composée d'applications linéaires. Lien entre matrices inversibles et isomorphismes.</p>	<p>Exemple : matrice, dans la base $(1, i)$ de \mathbb{C} vu comme plan vectoriel réel, de la similitude de multiplicateur $a + ib$.</p> <p>Cas particulier des endomorphismes.</p>
b) Application linéaire canoniquement associée à une matrice	
<p>Application linéaire canoniquement associée à une matrice.</p> <p>Noyau, image et rang d'une matrice.</p> <p>Une matrice de $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ est inversible si et seulement si son noyau est réduit au sous-espace nul, ou si et seulement si ses colonnes engendrent l'espace \mathbb{K}^n ou si et seulement si son rang est n.</p> <p>Toute matrice carrée inversible à gauche ou à droite est inversible.</p>	<p>On identifie ici $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ et \mathbb{K}^n.</p> <p>Les colonnes engendrent l'image, les lignes donnent un système d'équations du noyau.</p> <p>Retour sur la condition d'inversibilité d'une matrice triangulaire.</p> <p>Lien entre les diverses notions de rang.</p>

Changements de bases, équivalence

Contenus	Capacités & commentaires
a) Changements de bases	
<p>Matrice de passage d'une base à une autre.</p> <p>Inversibilité et inverse d'une matrice de passage.</p> <p>Effet d'un changement de base sur la matrice d'un vecteur.</p> <p>Effet d'un changement du couple de bases sur la matrice d'une application linéaire.</p> <p>Effet d'un changement de base sur la matrice d'un endomorphisme.</p>	<p>Exemples de recherche d'une base dans laquelle la matrice d'un endomorphisme donné est simple.</p>
b) Matrices équivalentes et rang	
<p>Si $u \in \mathcal{L}(E, F)$ est de rang r, il existe un couple de bases dans lequel u a pour matrice J_r.</p> <p>Matrices équivalentes.</p> <p>Une matrice est de rang r si et seulement si elle est équivalente à J_r.</p> <p>Invariance du rang par transposition.</p> <p>Rang d'une matrice extraite. Caractérisation du rang par les matrices carrées extraites.</p> <p>Les opérations élémentaires sur les colonnes (resp. lignes) conservent l'image (resp. le noyau). Les opérations élémentaires conservent le rang.</p>	<p>La matrice J_r a tous ses coefficients nuls à l'exception des r premiers coefficients diagonaux, égaux à 1.</p> <p>Classification des matrices équivalentes par le rang.</p> <p>Application : calcul du rang.</p>

Questions de cours

(i) **CCINP 25** : Soit a un nombre complexe.

On note E l'ensemble des suites à valeurs complexes telles que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+2} = 2a u_{n+1} + 4(ia - 1)u_n \text{ avec } (u_0, u_1) \in \mathbb{C}^2.$$

1. a) Prouver que E est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites à valeurs complexes.
b) Déterminer, en le justifiant, la dimension de E .
2. Dans cette question, on considère la suite de E définie par : $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$.
Exprimer, pour tout entier naturel n , le nombre complexe u_n en fonction de n .

Indication : discuter suivant les valeurs de a .

(ii) **CCINP 59** : Soit E l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans \mathbb{K} ($\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{K} = \mathbb{C}$) de degré inférieur ou égal à n .

Soit f l'endomorphisme de E défini par : $\forall P \in E, f(P) = P - P'$.

1. Démontrer que f est bijectif de deux manières :
a) sans utiliser de matrice de f ,
b) en utilisant une matrice de f .
2. Soit $Q \in E$. Trouver P tel que $f(P) = Q$.

Indication : si $P \in E$, quel est le polynôme $P^{(n+1)}$?

(iii) **CCINP 60** : Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ et f l'endomorphisme de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par : $f(M) = AM$.

1. Déterminer une base de $\text{Ker } f$.
2. f est-il surjectif ?
3. Déterminer une base de $\text{Im } f$.
4. A-t-on $\mathcal{M}_2(\mathbb{R}) = \text{Ker } f \oplus \text{Im } f$?

(iv) **CCINP 62** : Soit E un espace vectoriel sur \mathbb{R} ou \mathbb{C} . Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - f - 2\text{Id} = 0$.

1. Prouver que f est bijectif et exprimer f^{-1} en fonction de f .
2. Prouver que $E = \text{Ker}(f + \text{Id}) \oplus \text{Ker}(f - 2\text{Id})$:
3. Dans cette question, on suppose que E est de dimension finie.
Prouver que $\text{Im}(f + \text{Id}) = \text{Ker}(f - 2\text{Id})$.

(v) **CCINP 64** : Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie n .

1. Démontrer que : $E = \text{Im } f \oplus \text{Ker } f \implies \text{Im } f = \text{Im } f^2$.
2. a) Démontrer que :

$$\text{Im } f = \text{Im } f^2 \iff \text{Ker } f = \text{Ker } f^2.$$

b) Démontrer que :

$$\text{Im } f = \text{Im } f^2 \implies E = \text{Im } f \oplus \text{Ker } f.$$

(vi) **CCINP 71** : Soit p , la projection vectorielle de \mathbb{R}^3 , sur le plan P d'équation $x + y + z = 0$, parallèlement à la droite D d'équation $x = \frac{y}{2} = \frac{z}{3}$.

1. Vérifier que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$.
2. Soit $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Déterminer $p(u)$ et donner la matrice de p dans la base canonique de \mathbb{R}^3 .
3. Déterminer une base de \mathbb{R}^3 dans laquelle la matrice de p est diagonale.

(vii) **CCINP 87** : Soient a_0, a_1, \dots, a_n $n + 1$ réels deux à deux distincts.

1. Montrer que si b_0, b_1, \dots, b_n sont $n+1$ réels quelconques, alors il existe un unique polynôme P vérifiant $\deg P \leq n$ et $\forall i \in \{0, \dots, n\} P(a_i) = b_i$.
2. Soit $k \in \llbracket 0, \dots, n \rrbracket$. Expliciter ce polynôme P , que l'on notera L_k , lorsque

$$\forall i \in \llbracket 0, \dots, n \rrbracket \quad b_i = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq k \\ 1 & \text{si } i = k \end{cases}$$

3. Prouver que $\forall p \in \llbracket 0, \dots, n \rrbracket, \sum_{k=0}^n a_k^p L_k = X^p$.

(viii) **CCINP 90** : \mathbb{K} désigne le corps des réels ou celui des complexes.

Soient a_1, a_2, a_3 trois scalaires distincts donnés de \mathbb{K} .

1. Montrer que

$$\begin{array}{ccc} \Phi: \mathbb{K}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^3 \\ P & \longmapsto & (P(a_1), P(a_2), P(a_3)) \end{array}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

2. On note (e_1, e_2, e_3) la base canonique de \mathbb{K}^3 et on pose $\forall k \in \{1, 2, 3\}, L_k = \Phi^{-1}(e_k)$.
 - a) Justifier que (L_1, L_2, L_3) est une base de $\mathbb{K}_2[X]$.
 - b) Exprimer les polynômes L_1, L_2 et L_3 en fonction de a_1, a_2 et a_3 .
3. Soit $P \in \mathbb{K}_2[X]$. Déterminer les coordonnées de P dans la base (L_1, L_2, L_3) .
4. **Application** : On se place dans \mathbb{R}^2 muni d'un repère orthonormé et on considère les trois points $A(0, 1), B(1, 3), C(2, 1)$.
Déterminer une fonction polynomiale de degré 2 dont la courbe passe par les points A, B et C .

(ix) **CCINP 93** : Soit E un espace vectoriel réel de dimension finie $n > 0$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^3 + u^2 + u = 0$.
Montrer que $\text{Im} u \oplus \text{Ker} u = E$.