Devoir Libre n° 17

Problème 1 : des suites récurrentes (Mines de sup 2001)

Partie I

1. On montre que $E_a^{(0)}$ est un sous-espace vectoriel de $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}},+,\cdot)$.

- $E_a^{(0)} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ par définition.
- $E_a^{(0)} \neq \varnothing$ car $(0)_n \in E_a^{(0)}$ avec $b_{(0)_n} = 0$.
- Si $u, v \in E_a^{(0)}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(u+\lambda v)_{n+1} = u_{n+1} + \lambda v_{n+1} = a(u_n + \lambda v_n) + (b_u + \lambda b_v) = a(u+\lambda v)_n + b_{u+\lambda v}$$

avec $b_{u+\lambda v} = b_u + \lambda b_v$. Donc $u + \lambda v \in E_a^{(0)}$

Donc $\boxed{E_a^{(0)} \text{ est un } \mathbb{R}\text{-espace vectoriel.}}$

2.a) On obtient facilement que $\boxed{x, y \in E_a^{(0)} \text{ avec } b_x = 1-a \text{ et } b_y = 0.}$

2.b) De plus, les suites ne sont pas colinéaires car y n'est pas constante (car $a \neq 1$).
Donc $\boxed{(x,y) \text{ est une famille libre de } E_a^{(0)}.}$

2.c) Si $u \in E_a^{(0)}$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = a u_n + b_u$. Il s'agit d'une suite arithmético-géométrique. La solution constante vérifie $c = ac + b_u$ soit $c = \dfrac{b_u}{1-a}$ (car $a \neq 1$) donc on a $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda a^n + c$.

On calcule $u_0 = \lambda + c$ donc $\boxed{\text{pour tout } n \in \mathbb{N},\ u_n = (u_0 - c)a^n + c \text{ avec } c = \dfrac{b_u}{1-a}.}$

2.d) On obtient donc, dans la question précédente, $u = \lambda y + c x \in \mathrm{Vect}(x,y)$.
Comme $x, y \in E_a^{(0)}$, on en déduit que $E_a^{(0)} = \mathrm{Vect}(x,y)$.
Et comme (x,y) est libre, $\boxed{\text{il s'agit d'une base de } E_a^{(0)}.}$ Ainsi, $\boxed{\dim E_a^{(0)} = 2.}$

Partie II

1.

- φ est linéaire par linéarité de l'évaluation polynomiale (à détailler dans la copie),
- $\dim \mathbb{R}_p[X] = \dim \mathbb{R}^{p+1}$
- φ est injective car son noyau est réduit à 0 : un polynôme de degré au plus p ayant $p+1$ racines étant nécessairement nul.

$\boxed{\text{Il s'agit donc d'un isomorphisme.}}$

---

2. Si $u \in E_a^{(p)}$, un polynôme $P \in \mathbb{R}_p[X]$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = a u_n + P(n)$ est tel que

$$\varphi(P) = (u_1 - a u_0, \dots, u_{p+1} - a u_p).$$

L'injectivité de φ donne $\boxed{\text{l'unicité de } P.}$

---

3. On montre que $E_a^{(p)}$ est un sous-espace vectoriel de $\left(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, +, \cdot\right)$.

- $E_a^{(p)} \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ par définition.
- $E_a^{(p)} \neq \varnothing$ car $(0)_n \in E_a^{(0)}$ avec $P_{(0)_n} = 0$.
- Si $u, v \in E_a^{(p)}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$(u + \lambda v)_{n+1} = u_{n+1} + \lambda v_{n+1} = a(u_n + \lambda v_n) + (P_u(n) + \lambda P_v(n)) = a(u + \lambda v)_n + P_{u+\lambda v}(n)$$

avec $P_{u+\lambda v} = P_u + \lambda P_v \in \mathbb{R}_p[X]$. Donc $u + \lambda v \in E_a^{(p)}$

Donc $\boxed{E_a^{(p)} \text{ est un } \mathbb{R}\text{-espace vectoriel.}}$

---

4. La démonstration précédente et l'unicité de P donnent directement

$$\theta(u + \lambda v) = \theta(u) + \lambda\theta(v).$$

Donc $\boxed{\theta \text{ est bien une application linéaire de } E_a^{(p)} \text{ dans } \mathbb{R}_p[X].}$

---

5. $u \in \operatorname{Ker}\theta \iff \forall\, n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = a u_n$. Donc $\boxed{\operatorname{Ker}\theta = \{(\lambda a^n)_n \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = \operatorname{Vect} y.}$

6.a) Comme $a \neq 1$, $\boxed{\deg Q_k = k}$ (et son cœfficient dominant est $1 - a$).

6.b) $(Q_0, Q_1, \dots, Q_p)$ est une famille de $p + 1 = \dim \mathbb{R}_p[X]$ polynômes de $\mathbb{R}_p[X]$ non nuls a degrés étagés, donc libre. $\boxed{\text{C'est donc une base de } \mathbb{R}_p[X].}$

7.a) Pour tout $k \in [\![0, p]\!]$, $Q_k = \theta\left(\left(n^k\right)_n\right)$ car pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)^k = a n^k + Q_k(n)$. Donc $\boxed{Q_k \in \operatorname{Im}\theta.}$

7.b) Comme $(Q_0, Q_1, \dots, Q_p)$ est une base de $\mathbb{R}_p[X]$, on déduit $\mathbb{R}_p[X] \subset \operatorname{Im}\theta \subset \mathbb{R}_p[X]$ donc $\boxed{\operatorname{Im}\theta = \mathbb{R}_p[X].}$

---

8. En appliquant le théorème du rang à θ, on en déduit que $E_a^{(p)}$ est de dimension finie et $\dim E_a^{(p)} = \operatorname{rg}\theta + \dim(\operatorname{Ker}\theta) = p + 1 + 1$ donc $\boxed{\dim E_a^{(p)} = p + 2.}$

---

9. La famille $(x^{(0)}, \dots, x^{(p)}, y)$ contient $p + 2 = \dim E_a^{(p)}$ suites de $E_a^{(p)}$ comme cela a déjà été vu. Il suffit donc de démontrer qu'elle est libre.

Or si $\lambda_0 x^{(0)} + \cdots + \lambda_p x^{(p)} + \mu y = (0)$, alors, en composant par θ, $\lambda_0 Q_0 + \cdots + \lambda_p Q_p + 0 = 0$ et donc $\lambda_0 = \cdots = \lambda_p$ d'après 8.b et donc $\mu = 0$ car $y \neq (0)$.

Donc $\boxed{(x^{(0)}, \dots, x^{(p)}, y) \text{ est une base de } E_a^{(p)}.}$

10.

$$\begin{cases} \forall n \in \mathbb{N}, & u_{n+1} = 2u_n - 2n + 7 \\ & u_0 = -2 \end{cases}$$

D'après ce qui précède on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \lambda + \mu n + \nu 2^n$ avec $(\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}^3$.

En calculant u_0, u_1 et u_2, on obtient le système $\begin{cases} \lambda + \nu = -2 \\ \lambda + \mu + 2\nu = 3 \\ \lambda + 2\mu + 4\nu = 11 \end{cases}$

On obtient, après résolution, $(\lambda, \mu, \nu) = (-5, 2, 3)$.

Ainsi, $\boxed{\text{pour tout } n,\ u_n = 3 \cdot 2^n + 2n - 5.}$

Problème 2 : On joue aux billes ?

Cas où il n'y a pas de joker

1. $\boxed{\Omega = [\![1, N]\!]}$ (on numérote les billes), probabilité uniforme.

2. $\boxed{p_0 = p(G_1) = \dfrac{|G_1|}{|\Omega|} = \dfrac{n}{N}.}$

Cas où il y a 2 jokers

3.

- Pour J_1, on ne s'intéresse qu'au premier tirage (avec probabilité uniforme). Comme il y a 2 jokers et $N+2$ billes, $\boxed{\mathbb{P}(J_1) = \dfrac{2}{N+2}.}$
- Calculer $\mathbb{P}(J_2|J_1)$ renvient à considérer l'état du sac après le premier tirage d'un joker : 1 joker et $N+1$ billes, avec probabilité uniforme. Donc $\boxed{\mathbb{P}(J_2|J_1) = \dfrac{1}{N+1}.}$
- Par définition, $\boxed{\mathbb{P}(J_1 \cap J_2) = \mathbb{P}(J_1)\mathbb{P}(J_2|J_1) = \dfrac{2}{(N+1)(N+2)}.}$

4.

- Pour G_1, on ne s'intéresse qu'au premier tirage (avec probabilité uniforme). Comme il y a n billes gagnantes et $N+2$ billes, $\boxed{\mathbb{P}(G_1) = \dfrac{n}{N+2}.}$
- Calculer $\mathbb{P}(G_2|J_1)$ renvient à considérer l'état du sac après le premier tirage d'un joker : n billes gagnantes et $N+1$ billes, avec probabilité uniforme. Donc $\boxed{\mathbb{P}(G_2|J_1) = \dfrac{n}{N+1}.}$
- Calculer $\mathbb{P}(G_3|J_1 \cap J_2)$. renvient à considérer l'état du sac après les deux premiers tirages d'un joker : n billes gagnantes et N billes, avec probabilité uniforme. Donc $\boxed{\mathbb{P}(G_3|J_1 \cap J_2) = \dfrac{n}{N}.}$

5. Gagner se résume à tirer une bille gagnante à l'un des trois tirages, chacun des événements étant disjoints. Donc $\boxed{G = G_1 \sqcup (G_2 \cap J_1) \sqcup (G_3 \cap J_1 \cap J_2).}$

6. On a d'après la question précédente (les probabilités étant non nulles) que $p_2 = \mathbb{P}(G_1) + \mathbb{P}(J_1)\mathbb{P}(G_2|J_1) + \mathbb{P}(J_1 \cap J_2)\mathbb{P}(G_3|J_1 \cap J_2)$. Donc

$$p_2 = \frac{n}{N+2} + \frac{2n}{(N+1)(N+2)} + \frac{2n}{N(N+1)(N+2)} = \frac{n(N(N+1)+2N+2)}{N(N+1)(N+2)} = \frac{n(N+1)(N+2)}{N(N+1)(N+2)} = \frac{n}{N}.$$

Finalement $\boxed{p_2 = p_0.}$

Cas général

7. Comme il y a k jokers, $\boxed{\text{il y a au plus } k+1 \text{ tirages.}}$

8. Gagner au i^{e} tirage, c'est tirer des jokers aux $i-1$ premier tirage, puis une bille gagnante au i^{e} tirage. Donc $\boxed{C_i = G_i \cap J_1 \cap \cdots \cap J_{j-1}, \text{ pour } 1 \leqslant i \leqslant k+1.}$

9. On démontre par récurrence que $\mathbb{P}(J_1 \cap \cdots \cap J_p) \neq 0$ si $p \leqslant k$: c'est vrai pour $p = 1$ (la probabilité vaut alors $\dfrac{k}{N+k}$ comme dans la partie précédente) et si c'est vrai pour $p \leqslant k-1$, alors $\mathbb{P}(J_1 \cap \cdots \cap J_{p+1}) = \mathbb{P}(J_1 \cap \cdots \cap J_p) \times \mathbb{P}(J_{p+1} \mid J_1 \cap \cdots \cap J_p)$ avec $\mathbb{P}(J_{p+1} \mid J_1 \cap \cdots \cap J_p) = \dfrac{k-p}{N+k-p} \neq 0$ en considérant l'état du sac après les p tirages de jokers, ce qui établit la récurrence.

On peut donc appliquer la formule des probabilités composées :

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(C_i) &= \mathbb{P}(J_1) \cdot \mathbb{P}(J_2|J_1) \cdots \mathbb{P}(J_{i-1}|J_1 \cap \cdots \cap J_{i-2}) \cdot \mathbb{P}(G_i|J_1 \cap \cdots \cap J_{i-1}) \\ &= \frac{k}{N+k} \times \frac{k-1}{N+k-1} \times \cdots \times \frac{k-i+2}{N+k-i+2} \times \frac{n}{N+k-i+1}\end{aligned}$$

les calculs étant de nouveau semblables à ceux de la partie précédente.

On obtient alors en multipliant numérateur et dénominateur par $\dfrac{k+1}{i!}$: $\boxed{\mathbb{P}(C_i) = \dfrac{n\binom{k+1}{i}}{(k+1)\binom{N+k}{i}}.}$

10. On dénombre les triplet (x, A) où $A \subset [\![1, m+1]\!]$, $|A| = p+1$ et $x \in A$. (Le maire et le conseil municipal).

- Soit on choisit d'abord A : $\dbinom{m+1}{p+1}$ choix puis x : $p+1$ choix soit en tout $(p+1)\dbinom{m+1}{p+1}$ choix.
- Soit on choisit d'abord x : $m+1$ choix puis $A \setminus \{x\}$: $\dbinom{m}{p}$ choix soit en tout $(m+1)\dbinom{m}{p}$ choix.

Finalement, $\boxed{\dbinom{m+1}{p+1} = \dfrac{m+1}{p+1}\dbinom{m}{p}.}$

On peut évidemment retrouver le résultats avec des factorielles.

11. On a $\sum_{i=1}^{1}\frac{\binom{1}{i}}{\binom{N+1}{i}}=\frac{\binom{1}{1}}{\binom{N+1}{1}}=\frac{k+1}{N}$ et si pour un $k\geqslant 0$, $\sum_{i=1}^{k+1}\frac{\binom{k+1}{i}}{\binom{N+k}{i}}=\frac{k+1}{N}$, alors, en utilisant le résultat de la question précédente,

$$\sum_{i=1}^{k+2}\frac{\binom{k+2}{i}}{\binom{N+k+1}{i}}=\sum_{i=1}^{k+2}\frac{\frac{k+2}{i}\binom{k+1}{i-1}}{\frac{N+k+1}{i}\binom{N+k}{i-1}}=\frac{k+2}{N+k+1}\sum_{j=0}^{k+1}\frac{\binom{k+1}{j}}{\binom{N+k}{j}}=\frac{k+2}{N+k+1}\left(\frac{k+1}{N}+1\right)=\frac{k+2}{N},$$

ce qui établit la récurrence.

Finalement, pour tout $k\in\mathbb{N}$, $\boxed{\sum_{i=1}^{k+1}\frac{\binom{k+1}{i}}{\binom{N+k}{i}}=\frac{k+1}{N}.}$

12. On a que $G=\bigsqcup_{i=1}^{k+1}C_i$, donc $p_k=\sum_{i=1}^{k+1}\frac{n\binom{k+1}{i}}{(k+1)\binom{N+k}{i}}=\frac{n}{N}$ d'après les question 9 et 11.

Finalement, $\boxed{p_k=p_0.}$

Une autre méthode, directe

13. Ω est l'ensemble des $(N+k)$-listes de $\{G,P,J\}^{N+k}$ avec exactement n apparitions de G, k apparitions J et $N-n$ apparitions de P, avec une probabilité uniforme.

Un élément de Ω est déterminé par la position des jokers : $\binom{N+k}{k}$ possibilités et par celle des billes gagnante : $\binom{N}{n}$ possibilités pour les places restantes, toutes les autres billes étant perdantes.

On a donc $\boxed{|\Omega|=\binom{N+k}{k}\binom{N}{n}.}$

14. Les éléments de P : « On perd » sont les $N+k$-listes dont les premiers éléments ont entre 0 et k jokers puis un P. On peut donc les dénombrer en plaçant d'abord les jokers : $\binom{N+k}{k}$ possibilités puis un premier P tout de suite après les premiers jokers consécutifs, puis les n billes gagnantes : $\binom{N-k-1}{n}$ possibilités. Donc $\boxed{|P|=\binom{N+k}{k}\binom{N-1}{n}.}$

15. On a donc $p_k=1-\mathbb{P}(P)=1-\frac{\binom{N+k}{k}\binom{N-1}{n}}{\binom{N+k}{k}\binom{N}{n}}=1-\frac{N-n}{N}=\frac{n}{N}=p_0$.

Une autre méthode, par récurrence

16. Pour gagner, on a deux possibilité disjointes $(G=G_1\sqcup(G\cap J_1))$:

- Soit gagner au premier tirage, avec une probabilité $\mathbb{P}(G_1)=\frac{n}{N+k+1}$.

- Soit gagner à un autre tirage, avec une probabilité $\mathbb{P}(G \cap J_1) = \mathbb{P}(J_1)\mathbb{P}(G \mid J_1)$. Après le tirage du premier joker, le sac contient k jokers et autant de billes perdantes et gagnantes. Cela revient donc à réaliser la même expérience avec k jokers au départ. Autrement dit, $\mathbb{P}(G \mid J_1) = p_k$.

Finalement, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\boxed{p_{k+1} = \dfrac{k+1}{N+k+1} p_k + \dfrac{n}{N+k+1}.}$

---

17. c solution si et seulement si pour tout k, $\dfrac{N}{N+k+1} c = \dfrac{n}{N+k+1}$, donc la seule solution constante est $\boxed{c = \dfrac{n}{N}.}$ (Quelle surprise !)

---

18. Ainsi, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $p_{k+1} - \dfrac{k+1}{N+k+1} p_k = \dfrac{n}{N} - \dfrac{k+1}{N+k+1} \dfrac{n}{N}$ donc

$$p_{k+1} - \frac{n}{N} = \frac{k+1}{N+k+1}\left(p_k - \frac{n}{N}\right),$$

donc, par récurrence, $p_k - \dfrac{n}{N} = \dfrac{u_k}{v_k}\left(p_0 - \dfrac{n}{N}\right) = 0$. Ainsi, pour $k \in \mathbb{N}$, $\boxed{p_k = \dfrac{n}{N}.}$

Fin