

Devoir Libre n° 18

Il est possible pour ceux qui le souhaitent de faire ce devoir à deux et de ne rendre qu'une seule copie (cherchez à deux et partagez-vous la rédaction).

Racines carrées d'endomorphisme et représentation à diagonale nulle

Soient E un espace vectoriel réel de dimension 3 et $\mathcal{B} = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ une base de E . Considérons l'endomorphisme u de E tel que $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = A$ où

$$A = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 4 & -4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}.$$

$\lambda \in \mathbb{R}$ est dit **valeur propre** de u s'il existe $\vec{x} \in E$ tel que $\vec{x} \neq \vec{0}$ et $u(\vec{x}) = \lambda \vec{x}$. Un tel $\vec{x} \neq \vec{0}$ est un **vecteur propre** associé à la valeur propre λ . Le **sous-espace propre** associé à λ est

$$E_\lambda(u) = \text{Ker}(u - \lambda \text{id}_E) = \{ \vec{x} \in E \mid u(\vec{x}) = \lambda \vec{x} \}.$$

u est dit **diagonalisable** si et seulement s'il existe une base de E formée de vecteurs propres de u .

I. Diagonalisation de u

- Justifier que λ est valeur propre de u si et seulement si $A - \lambda I_3$ n'est pas de rang 3.
- Vérifier que -2 et 1 sont valeurs propres de u .
- Pour chacune de ces valeurs propres, déterminer les vecteurs d'une base du sous-espace propre associé, exprimés à l'aide des vecteurs de \mathcal{B} .
- En déduire que u est diagonalisable.
- Déterminer une base $\mathcal{B}' = (\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$ de E telle que la matrice de u dans cette nouvelle base \mathcal{B}' soit

$$A' = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

II. Recherche des « racines carrées » de u

On suppose qu'il existe un endomorphisme v de E tel que $v \circ v = u$.

- Démontrer que $u \circ v = v \circ u$.
- Démontrer que $u(\vec{e}'_1) = -2v(\vec{e}'_1)$. En déduire que $v(\vec{e}'_1)$ et \vec{e}'_1 sont colinéaires puis que \vec{e}'_1 est un vecteur propre de v .
- Soit \vec{x} un vecteur propre de u associé à la valeur propre 1 . Démontrer que $u(v(\vec{x})) = v(\vec{x})$ et en déduire que $v(\vec{x})$ appartient à $\text{Vect}(\vec{e}'_2, \vec{e}'_3)$.
- En déduire qu'il existe des nombres réels a, x, y, z, t tels que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(v) = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & x & y \\ 0 & z & t \end{pmatrix}.$$

- Démontrer que $(\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(v))^2 = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(u)$ et en déduire que $a^2 = -2$.
- Existe-t-il des endomorphismes v de E tels que $v \circ v = u$? Votre réponse sera justifiée.

III. Construction d'une base de E dans laquelle la matrice de u est de diagonale nulle

Nous constatons que la somme des éléments diagonaux de A est nulle et nous nous proposons de démontrer que A est semblable à une matrice dont tous les éléments diagonaux sont nuls.

12. Mettons en place notre premier changement de base.

12.a) Démontrer que la famille $(\vec{e}_1, u(\vec{e}_1))$ est libre.

12.b) Démontrer qu'un vecteur \vec{x} de composantes (a, b, c) dans la base \mathcal{B} appartient à $\text{Vect}(\vec{e}_1, u(\vec{e}_1))$ si, et seulement si, $4b - c = 0$. En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que la famille $(\vec{e}_1, u(\vec{e}_1), \vec{x})$ soit une base de E .

Dans la suite de ce problème, \vec{e}_3'' désigne le vecteur de composantes $(1, 1, 1)$ dans la base \mathcal{B} . On note alors \mathcal{B}'' la famille $(\vec{e}_1, u(\vec{e}_1), \vec{e}_3'')$.

12.c) Justifier que \mathcal{B}'' est une base de E .

12.d) Écrire la matrice de passage P de \mathcal{B} à \mathcal{B}'' et calculer P^{-1} . Calculer alors la matrice A'' de u dans la base \mathcal{B}'' .

La matrice obtenue est de la forme $A'' = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \beta \\ 1 & \gamma & \delta \\ 0 & \lambda & \mu \end{pmatrix}$ où $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda, \mu$ désignent des nombres réels.

13. Soit $\mathcal{C} = ((1, 0), (0, 1))$ la base canonique de \mathbb{R}^2 . Considérons l'endomorphisme f de \mathbb{R}^2 défini par $\text{Mat}_{\mathcal{C}}(f) = \begin{pmatrix} \gamma & \delta \\ \lambda & \mu \end{pmatrix}$, où les nombres $\gamma, \delta, \lambda, \mu$ ont été calculés à la question précédente.

13.a) Démontrer que la famille $\mathcal{C}' = ((0, 1), f((0, 1)))$ est une base de \mathbb{R}^2 et écrire la matrice de passage de \mathcal{C} à \mathcal{C}' .

13.b) Calculer alors la matrice de f dans cette nouvelle base \mathcal{C}' .

13.c) En notant $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ la matrice de passage de \mathcal{C} à \mathcal{C}' , où a, b, c, d désignent des

nombres réels calculés précédemment, définissons la matrice $R = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}$.

(i) Démontrer que R est inversible et calculer R^{-1} .

(ii) Calculer $R^{-1}A''R$.

14. En déduire que A est semblable à une matrice dont les éléments diagonaux sont tous nuls.

FIN DE L'ÉNONCÉ