Corrigé du Devoir Libre n° 18

Racines carrées d'endomorphisme et représentation à diagonale nulle (d'après Agro-Véto 2009)

I. Diagonalisation de u

1. $\boxed{\lambda \text{ est valeur propre de } u}$ si et seulement si $\mathrm{Ker}(u-\lambda\,\mathrm{id}_E)\neq\{0_E\}$
si et seulement si $\mathrm{Ker}(A-\lambda I_3)\neq\left\{\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\right\}$
si et seulement si $A-\lambda I_3$ n'est pas inversible
si et seulement si $\boxed{A-\lambda I_3 \text{ n'est pas de rang } 3.}$

2. En utilisant la question précédente, on fait un calcul de rang. En opérant exclusivement sur les lignes, on ne change pas le noyau ce qui facilite la réponse à la question suivante. (Ici le rang ne saute pas aux yeux au départ, mais on rappelle que le rang d'une matrice échelonnée est le nombre de lignes non nulles.)

$$\begin{aligned}\mathrm{rg}(A+2I_3)&=\mathrm{rg}(2A+4I_3)\\
&=\mathrm{rg}\begin{pmatrix}5&1&1\\1&5&-1\\4&-4&2\end{pmatrix}\underset{L_1\leftrightarrow L_2}{=}\mathrm{rg}\begin{pmatrix}1&5&-1\\5&1&1\\4&-4&2\end{pmatrix}\underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-5L_1\\L_3\leftarrow L_3-4L_1}}{=}\mathrm{rg}\begin{pmatrix}1&5&-1\\0&-24&6\\0&-24&6\end{pmatrix}\\
&\underset{\substack{L_3\leftarrow L_3-L_2\\L_2\leftarrow \frac{1}{6}L_2}}{=}\mathrm{rg}\begin{pmatrix}1&5&-1\\0&-4&1\\0&0&0\end{pmatrix}=2\end{aligned}$$

donc $A+2I_3\notin\mathscr{GL}_3(\mathbb{R})$ puis $\boxed{-2 \text{ est valeur propre de } u.}$

Puis

$$A-I_3=\frac{1}{2}\,\mathrm{rg}\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-1&-1\\4&-4&-4\end{pmatrix}$$

Les colonnes étant évidemment liées, $A-I_3\notin\mathscr{GL}_3(\mathbb{R})$ donc $\boxed{1 \text{ est valeur propre de } u.}$

3. On commence par déterminer les noyaux de $A+2I_3$ et de $A-I_3$, et on en déduit ceux de $u+2\,\mathrm{id}_E$ et $u-\mathrm{id}_E$ via la base $\mathscr{B}$.

Avec les calculs de la question précédentes, le noyau de $A+2I_3$ est celui de $\begin{pmatrix}1&5&-1\\0&-4&1\\0&0&0\end{pmatrix}$ (opérations élémentaires sur les lignes). Comme le rang vaut 2, le noyau est dimension $3-2=1$. Or on remarque dans la deuxième matrice (et donc aussi dans la première) que $C_1-C_2-4C_3=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$ donc $\begin{pmatrix}1\\-1\\-4\end{pmatrix}\in\mathrm{Ker}(A+2I_2)$. Comme ce vecteur est non nul et comme ce noyau est de dimension 1, $\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\-4\end{pmatrix}\right)$ est une base de $\mathrm{Ker}(A+2I_2)$ donc $\boxed{(\vec{e}_1-\vec{e}_2-4\vec{e}_3) \text{ est une base de } \mathrm{Ker}(u+2\,\mathrm{id}_E).}$

Autre méthode : $(A+2I_3)\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\iff\begin{pmatrix}1&5&-1\\0&-24&6\\0&0&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\iff\begin{cases}x+5y-z=0\\-4y+z=0\end{cases}\iff\begin{cases}x=-y\\z=4y\end{cases}$ ce qui permet de trouver une base du noyau.

Pour $A-I_3=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-1&-1\\4&-4&-4\end{pmatrix}$ c'est plus direct : on a vu que le rang vaut 1, donc le noyau est de dimension $3-1=2$ et comme $C_1+C_2=C_1+C_3=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ sont deux vecteurs non colinéaires de $\mathrm{Ker}(A-I_3)$: ils en forment une bases. Ainsi, $\boxed{(\vec{e}_1+\vec{e}_2,\vec{e}_1+\vec{e}_3) \text{ est une base de } \mathrm{Ker}(u-\mathrm{id}_E).}$

---

4. On montre que la famille formée de vecteurs propres de u : $\left(\vec{e}_1',\vec{e}_2',\vec{e}_3'\right)$ où $\vec{e}_1'=\vec{e}_1-\vec{e}_2-4\vec{e}_3$, $\vec{e}_2'=\vec{e}_1+\vec{e}_2$, $\vec{e}_3'=\vec{e}_1+\vec{e}_3$ trouvés à la question précédente, est une base de E. Comme on a 3 vecteurs de E en dimension 3, il suffit de montrer qu'elle est libre.

Cela revient aussi à montrer que la famille $\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\-4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}\right)$ est libre.

Or si $x\begin{pmatrix}1\\-1\\-4\end{pmatrix}+y\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+z\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$, alors $\begin{cases}x+y+z=0\\-x+y=0\\-4x+z=0\end{cases}$ donc $y=x$, $z=4x$ et $6x=0$, ce qui donne $x=y=z=0$: la famille est libre.

Ainsi, $\boxed{u \text{ est diagonalisable.}}$

---

5. En considérant la base $\mathscr{B}'=\left(\vec{e}_1',\vec{e}_2',\vec{e}_3'\right)$ de la question précédente, on a par définition $\vec{e}_1'\in\mathrm{Ker}(u+2\,\mathrm{id}_E)$ et $\vec{e}_2',\vec{e}_3'\in\mathrm{Ker}(u+\mathrm{id}_E)$ donc

$$\begin{cases}u\left(\vec{e}_1'\right)=-2\vec{e}_2'\\u\left(\vec{e}_2'\right)=\vec{e}_2'\\u\left(\vec{e}_3'\right)=\vec{e}_3'\end{cases}$$

Ainsi, par définition, $\boxed{A'=\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(u)=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}.}$

II. Recherche des « racines carréees » de u

Voir corrigé officiel.

III. Construction d'une base de E dans laquelle la matrice de u est de diagonale nulle

Voir corrigé officiel.